CYU Cergy-Paris Université

Master 1, 2021-22
Systèmes dynamiques

**Feuille d'exercices numéro 4**

Linéarisation
Applications de premier retour

**Exercice 1** [Linéarisation d'une équation différentielle et application de premier retour.] On considère l'équation différentielle

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = (1 - x^2 - y^2)y - x.$$

1) Exhiber une solution périodique qui ne soit pas constante et passe par le point $(0, 1)$.

2) Calculer l'équation linéarisée au voisinage de cette solution périodique ; évaluer la résolvante de cette linéarisation en $T$, la période de la solution périodique (utiliser d'abord que le vecteur tangent à l'orbite périodique est vecteur propre du système linéarisé pour trouver une solution et après appliquer la variation de la constante pour en trouver une deuxième).

3) Démontrer que l'application de premier retour définie au voisinage de $(0, 1)$ est contractante, et en déduire le comportement des solutions voisines de l'orbite périodique pour de grandes valeurs de $t$.

**Exercice 2** On considère le champ de vecteurs

$$X = (x^2 + y^2 - 1, x).$$

1) Déterminer les points d'équilibre de $X$.

2) Soit $A = (0, -1)$. Ecrire l'équation linéarisée en $A$ et déterminer ses orbites.

3) Montrer que le champ $X$ est antisymétrique par rapport à l'axe des $y$ et en déduire qu'au voisinage de $A$ ses orbites sont fermées.

**Exercice 3** On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 + \epsilon f(x_1) \\ x_2' &= -x_1 + \epsilon g(x_2) \end{cases} \tag{1}$$

où $f, g$ sont des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ et telle que $f(0) = g(0) = 0$ et où $\epsilon$ est un petit paramètre réel strictement positif.

On écrira pour simplifier le système (2) sous la forme $z' = F_\epsilon(z)$.

1) Déterminer les solutions du système (2) quand $\epsilon = 0$.

2) Notons pour $z = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\phi_\epsilon^t(z)$ le flot du champ de vecteurs $F_\epsilon$. Soit $z = (u, v)$. Démontrer qu' on a uniformément en $t \in [-3\pi, 3\pi]$, $|z| = (u^2 + v^2)^{1/2} \leqslant 10$

$$\phi_\epsilon^t(z) = \phi_0^t(z) + \epsilon Y_z(t) + O(\epsilon^2)$$

où $Y_z(\cdot)$ est une fonction que l'on déterminera.

3) Soit $\delta > 0$ suffisamment petit (mais fixé). On note $\Sigma = ]\delta/2, 6[\times\{0\}$, $\tilde{\Sigma} = ]\delta/3, 10[\times\{0\}$. On suppose désormais que $z = (r, 0) \in \Sigma$. On note $\tau_\epsilon$ le temps de premier retour et $P_\epsilon : \Sigma \to \tilde{\Sigma}$ l'application de premier retour de Poincaré associés au champ de vecteurs $F_\epsilon$.

3.a) Que valent ces applications quand $\epsilon = 0$ ?

3.b) Démontrer que pour tout $(r, \epsilon) \in [\delta, 5]\times] - \epsilon_0, \epsilon_0[$ on a

$$P_\epsilon(r) = r + \epsilon b(r) + \epsilon^2 h(r, \epsilon)$$

où $b$ est une fonction que l'on déterminera et $h$ est $C^\infty$ sur $[\delta, 5]\times] - \epsilon_0, \epsilon_0[$.

4) On suppose dans la suite de l'exercice que $f(x) = -x^3$ et $g(x) = x$. Démontrer qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que si $|\epsilon| < \epsilon_1$, il existe un unique $r_\epsilon \in ]\delta, 5[$ pour lequel la solution de l'équation (2) vérifiant la condition initiale $x_1(0) = r_\epsilon$, $x_2(0) = 0$ soit périodique.

5) Cette orbite est-elle asymptotiquement stable ?

6) On suppose $|\epsilon| < \epsilon_2$ pour un $\epsilon_2$ suffisamment petit.

6.a) Démontrer que pour tout $|z| < 5$ le flot $\phi_\epsilon^t(z)$ est défini pour tout $t \geqslant 0$. Que dire de $\phi_\epsilon^t(z)$ quand $t \to \infty$ ?

6.b) Etablir que quitte à choisir $\epsilon_2$ suffisamment petit, il est possible de décrire le comportement des solutions de l'équation (1) pour toute condition initiale $x_1(0) = u$, $x_2(0) = v$, $(u^2 + v^2)^{1/2} < 5$. [On pourra passer en coordonnées polaires pour faire une étude locale de la dynamique en 0.]