CYU CERGY-PARIS UNIVERSITÉ

MASTER 1, 2021-22
SYSTÈMES DYNAMIQUES

Feuille d'exercices numéro 4

LINÉARISATION
APPLICATIONS DE PREMIER RETOUR

Exercice 1 [Linéarisation d'une équation différentielle et application de premier retour.] On considère l'équation différentielle

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = (1 - x^2 - y^2)y - x.$$

1) Exhiber une solution périodique qui ne soit pas constante et passe par le point $(0, 1)$.

2) Calculer l'équation linéarisée au voisinage de cette solution périodique ; évaluer la résolvante de cette linéarisation en T, la période de la solution périodique (utiliser d'abord que le vecteur tangent à l'orbite périodique est vecteur propre du système linéarisé pour trouver une solution et après appliquer la variation de la constante pour en trouver une deuxième).

3) Démontrer que l'application de premier retour définie au voisinage de $(0, 1)$ est contractante, et en déduire le comportement des solutions voisines de l'orbite périodique pour de grandes valeurs de t.

Solution –

1) On voit que $X_0 : t \mapsto (\sin t, \cos t)$ est la solution qui convient. C'est une solution T-périodique avec

$$T = 2\pi.$$

2)

Calcul de l'équation linéarisée.

L'EDO peut s'écrire sous la forme

$$X'(t) = F(X(t))$$

où

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -x + (1 - x^2 - y^2)y \end{pmatrix}.$$

L'équation linéarisée au voisinage de X_0 s'écrit

$$Y'(t) = DF(X_0(t)), \qquad Y(t) = v.$$

On trouve
$$D_X F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2xy & -x^2-3y^2 \end{pmatrix}$$
d'où (en utilisant les formules trigonométriques)
$$DF(\sin t, \cos t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-\sin(2t) & -1-2\cos^2 t \end{pmatrix}.$$
On est donc amené à étudier l'EDO linéaire
$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$
avec
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-\sin(2t) & -1-2\cos^2 t \end{pmatrix}.$$
On note $R(t,0)$ sa résolvante.

Etude de $R(2\pi,0)$.

Notons ϕ^t le flot de l'EDO $X'(t) = F(X(t))$ et $v_0 = (0,1)$. On a
$$X_0(t) = (\sin t, \cos t) = \phi^t(v_0).$$
On sait d'après le cours que
$$D\phi^{2\pi}(v_0) = R(2\pi,0). \tag{1}$$
Démontrons que le vecteur horizontal $(1,0) = F(v_0)$ est valeur propre de $R(2\pi,0)$ associé à la valeur propre 1. Pour cela, on constate que
$$\phi^{2\pi}(\phi^t(v_0)) = \phi^{t+2\pi}(v_0) = \phi^t(v_0) \quad (\text{car } \phi^{2\pi}(v_0) = v_0).$$
En dérivant en $t = 0$ (et en utilisant la formule de dérivation composée) on trouve
$$D\phi^{2\pi}(v_0)\cdot(F(v_0)) = F(v_0)$$
(on a utilisé le fait que $(d/dt)(\phi^t(v)) = F(\phi^t(v))$.) D'après (2) on a donc bien
$$R(2\pi,0)F(v_0) = F(v_0).$$
Ainsi, 1 est vp de $R(2\pi,0)$.

D'après le **théorème de Liouville**
$$\det R(2\pi,0) = e^{\int_0^{2\pi} \mathrm{tr} A(s)ds} = e^{-4\pi}.$$
Par conséquent, les vp de $R(2\pi,0)$ sont 1 et $e^{-4\pi}$.

3) Notons pour $\delta > 0$, Σ_δ le segment vertical $\Sigma = \{0\} \times [1-\delta, 2+\delta[\subset \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

On observe que Σ_δ contient le point $v_0 = (0,1)$ et que $X(0,1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est transverse en $(0,1)$ à Σ_δ :

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}X(v_0) \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Comme $\phi^{2\pi}(v_0) = v_0$ on peut donc définir l'application de premier retour de Poincaré sur Σ_δ

$$P : \Sigma_\delta \to \Sigma_{\delta'}$$

($\delta' > 0$) qui vérifie

$$P(v_0) = v_0.$$

Identifions Σ_δ avec le segment $]1-\delta, 1+\delta[$ et P avec l'application corrspondante $P :]1-\delta, 1+\delta[\to]1-\delta', 1+\delta'[$. On a donc

$$P(1) = 1.$$

On sait d'après le cours que P est de classe C^1 et que sa dérivée en 1 est liée à la résolvante $R(2\pi, 0)$ par

$$R(2\pi,0) = \begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & P'(1)\end{pmatrix}.$$

Comme $\det R(2\pi, 0) = e^{-4\pi}$ on en déduit que

$$P'(1) = e^{-4\pi} < 1.$$

Comme $|P'(1)| < 1$ on peut affirmer en suivant le cours que l'orbite périodique $(\phi^t(v_0))_{t\in\mathbb{R}}$ est attractive. □

Exercice 2 On considère le champ de vecteurs

$$X = (x^2 + y^2 - 1, x).$$

1) Déterminer les points d'équilibre de X.

2) Soit $A = (0, -1)$. Ecrire l'équation linéarisée en A et déterminer ses orbites.

3) Montrer que le champ X est antisymétrique par rapport à l'axe des y et en déduire qu'au voisinage de A ses orbites sont fermées.

Exercice 3 On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 + \epsilon f(x_1) \\ x_2' &= -x_1 + \epsilon g(x_2) \end{cases} \tag{2}$$

où f, g sont des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et telle que $f(0) = g(0) = 0$ et où ϵ est un petit paramètre réel strictement positif.

On écrira pour simplifier le système (2) sous la forme $z' = F_\epsilon(z)$.

1) Déterminer les solutions du système (2) quand $\epsilon = 0$.

2) Notons pour $z = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\phi_\epsilon^t(z)$ le flot du champ de vecteurs F_ϵ. Soit $z = (u, v)$. Démontrer qu' on a uniformément en $t \in [-3\pi, 3\pi]$, $|z| = (u^2 + v^2)^{1/2} \leqslant 10$

$$\phi_\epsilon^t(z) = \phi_0^t(z) + \epsilon Y_z(t) + O(\epsilon^2)$$

où $Y_z(\cdot)$ est une fonction que l'on déterminera.

3) Soit $\delta > 0$ suffisamment petit (mais fixé). On note $\Sigma =]\delta/2, 6[\times \{0\}$, $\tilde{\Sigma} =]\delta/3, 10[\times \{0\}$. On suppose désormais que $z = (r, 0) \in \Sigma$. On note τ_ϵ le temps de premier retour et $P_\epsilon : \Sigma \to \tilde{\Sigma}$ l'application de premier retour de Poincaré associés au champ de vecteurs F_ϵ.

3.a) Que valent ces applications quand $\epsilon = 0$?

3.b) Démontrer que pour tout $(r, \epsilon) \in [\delta, 5] \times] - \epsilon_0, \epsilon_0[$ on a

$$P_\epsilon(r) = r + \epsilon b(r) + \epsilon^2 h(r, \epsilon)$$

où b est une fonction que l'on déterminera et h est C^∞ sur $[\delta, 5] \times] - \epsilon_0, \epsilon_0[$.

4) On suppose dans la suite de l'exercice que $f(x) = -x^3$ et $g(x) = x$. Démontrer qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que si $|\epsilon| < \epsilon_1$, il existe un unique $r_\epsilon \in]\delta, 5[$ pour lequel la solution de l'équation (2) vérifiant la condition initiale $x_1(0) = r_\epsilon$, $x_2(0) = 0$ soit périodique.

5) Cette orbite est-elle asymptotiquement stable ?

6) On suppose $|\epsilon| < \epsilon_2$ pour un ϵ_2 suffisamment petit.

6.a) Démontrer que pour tout $|z| < 5$ le flot $\phi_\epsilon^t(z)$ est défini pour tout $t \geqslant 0$. Que dire de $\phi_\epsilon^t(z)$ quand $t \to \infty$?

6.b) Etablir que quitte à choisir ϵ_2 suffisamment petit, il est possible de décrire le comportement des solutions de l'équation (1) pour toute condition initiale $x_1(0) = u$, $x_2(0) = v$, $(u^2 + v^2)^{1/2} < 5$. [On pourra passer en coordonnées polaires pour faire une étude locale de la dynamique en 0.]