CYU CERGY-PARIS UNIVERSITÉ

MASTER 1, 2021-22
SYSTÈMES DYNAMIQUES

Feuille d'exercices numéro 1

RAPPELS
Topologie, Algèbre linéaire, Calcul différentiel, Espaces de Banach.

EDOs élémentaires.

Exercice 1 Déterminer les solutions des EDOs

$$x'(t) = 2x(t), \qquad x'(t) = 2x(t) + 1.$$

Ces solutions sont-elles bornées pour $t \in \mathbb{R}$?

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions de l'EDO

$$x''(t) + ax(t) = 0.$$

A quelle condition sur a ces solutions sont-elles bornées pour tout $t \in \mathbb{R}$?

Exercice 3 Trouver des solutions aux EDOs

$$\frac{dx}{dt} = x(t)^2, \qquad \frac{dx}{dt} = 1 + x(t)^2, \qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{1 - x(t)^2}.$$

Exercice 4 [Conservation de l'énergie et du moment cinétique]

Une particule de masse m se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ et soumise à une force F vérifie la relation fondamentale de la dynamique de Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = F \\ p = m\dfrac{dx}{dt} \quad \text{(impulsion)} \end{cases}$$

où on a noté x la position de la particule au temps x.

1) On suppose que F dérive d'un potentiel U, c'est-à-dire est de la forme

$$F(x) = -\nabla U(x)$$

où le potentiel $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

1.a) On introduit $E = E(t)$ l'énergie mécanique de la particule au temps t

$$E(t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x(t)).$$

Démontrer que $t \mapsto E(t)$ est une fonction constante.

1.b) Démontrer que si $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ est une solution de

$$x''(t) + \sin(x(t)) = 0$$

alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |x'(t)| < \infty.$$

2) On suppose que la force F est centrale c'est-à-dire de la forme

$$F(x) = f(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}.$$

On introduit le moment cinétique

$$\sigma(t) = m\frac{dx}{dt} \wedge x(t).$$

Démontrer que $t \mapsto \sigma(t)$ est une fonction constante. [On rappelle que si u_1 et u_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ le vecteur $u_1 \wedge u_2$ a pour coordonnées $(y_1z_2-y_2z_1, x_1z_2-x_2z_1, x_1y_2-x_2y_1)$.]

Topologie.

Exercice 5 Est-ce que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes ?

Exercice 6 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue et

$$\Gamma = \{(x, f(x),\ x \in [0,1]\}$$

son graphe.

Ce graphe est-il compact ? Connexe ?

Exercice 7 [Un ensemble connexe mais pas connexe par arcs.]

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$,

$$\Gamma = \{(x, \sin(1/x),\ x \in]0,1]\}, \qquad L = \{0\} \times [-1,1].$$

Démontrer que $\Gamma \cup L$ est connexe mais pas connexe par arcs. Est-il compact ?

Exercice 8 Si f est une fonction continue sur $[0,1]$ on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

1) Soit $E = C^0([0,1],[0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On définit sur E la distance $d_\infty : E \times E \to [0,\infty[$ par $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$.

1.a) L'espace (E, d_∞) est-il connexe ?

1.b) L'espace (E, d_∞) est-il complet ?

1.c) L'espace (E, d_∞) est-il compact ?

2) Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on définit à présent F_k l'ensemble de fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$ constitué des fonctions k-lipschitziennes c'est-à-dire vérifiant pour tout $x, y \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k \times |x-y|.$$

2.a) F_k est-il un sous-ensemble de E ?

2.b) L'espace (F_k, d_∞) est-il connexe ?

2.c) L'espace (F_k, d_∞) est-il complet ?

2.d) L'espace (F_k, d_∞) est-il compact ?

Exercice 9 [Cercles et hyperboles]

1) On considère pour $t \in \mathbb{R}$

$$C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = t\}, \qquad D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant t\}.$$

1.a) Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, l'ensemble C_t est-il ouvert, fermé, compact, connexe ? Même question pour l'ensemble D_t. Que représentent géométriquement C_t, D_t ?

1.b) Quel est l'intérieur de l'ensemble D_t ?

1.c) L'ensemble $\mathbb{R}^2 \backslash C_t$ est-il ouvert, fermé, compact ? Combien de composantes connexes a-t-il ?

2) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$H_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = t\}.$$

2.1) Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble H_t est-il compact ?

2.2) Que représentent géométriquement H_t ?

2.2) Déterminer en fonction de $t \in \mathbb{R}$ le nombre de composantes connexes de H_t.

Exercice 10 [Coniques]

Pour a, b, c, d, e, f réels tels que $abc \neq 0$ on considère le polynôme de degré 2 à deux variables réelles x, y

$$P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

On suppose $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé et on pose

$$E_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P(x,y) = \lambda\}.$$

1) 1.a) Démontrer que si $b^2 - 4ac < 0$, l'ensemble E_λ est homéomorphe à un ensemble C_t, $t \in \mathbb{R}$, où C_t est défini dans l'exercice 1.

1.b) Démontrer que si $b^2 - 4ac > 0$, l'ensemble E_λ est homeomorphe à un ensemble H_t, $t \in \mathbb{R}$, où H_t est défini dans l'exercice 1.

2) Déterminer en fonction de $a, b, c, d, e, f, \lambda$ le nombre de composantes connexes de l'ensemble E_λ.

Exercice 11 On note $M(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels et $GL(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M(2,\mathbb{R})$.

1) Démontrer que $GL(2,\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication.

2) Démontrer que $GL(2,\mathbb{R})$ est en bijection avec l'ensemble des *bases* (u,v) de $\mathbb{R}^2$.

3) $GL(2,\mathbb{R})$ est-il fermé, ouvert ?

4) Déterminer ses composantes connexes.

Algèbre linéaire, exponentielles de matrices.

Exercice 12 [Structure des matrices de $SL(2,\mathbb{R})$]

On note $SL(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $GL(2,\mathbb{R})$ de déterminant 1.

1) Démontrer que $SL(2,\mathbb{R})$ est un sous groupe de $GL(2,\mathbb{R})$ pour la multiplication.

2) Démontrer que $SL(2,\mathbb{R})$ est connexe.

3) Soit U une matrice de $SL(2,\mathbb{R})$.

3.a) Démontrer que si $|\mathrm{tr}(U)| > 2$, la matrice U est semblable à une matrice diagonale réelle $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

3.b) Démontrer que si $|\mathrm{tr}(U)| < 2$, la matrice U est semblable à une matrice de rotation de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

3.c) Démontrer que si $|\mathrm{tr}(U)| = 2$, la matrice U est semblable à une matrice *unipotente* de la forme $\pm\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13

1) On suppose que A est diagonale, $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Calculer $\exp(A)$.

2) Soient $A \in M(n, \mathbb{C})$, $P \in GL(n, \mathbb{C})$. Expliquer pourquoi

$$\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}.$$

3) En utilisant le fait que toute matrice à coefficients complexe est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, démontrer que

$$\det \exp(A) = \exp(\mathrm{tr}(A)).$$

4) On suppose $n = 2$. Calculer $\exp(A)$ dans les cas suivants :

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[On pourra dans un premier temps calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.]

Exercice 14 [Espaces stables et instables]

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Démontrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$.

3) Démontrer que l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lim_{t \to \infty} e^{tA} v = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

4) Démontrer qu'il existe une décomposition

$$\mathbb{R}^3 = E_s \oplus E_c \oplus E_u$$

où

$$E_s = \{v \in \mathbb{R}^3, \ \lim_{t \to \infty} e^{tA} v = 0\}, \quad E_u = \{v \in \mathbb{R}^3, \ \lim_{t \to -\infty} e^{tA} v = 0\}$$

et que pour tout vecteur $v \in E_c$, $e^{tA}v$ est borné.

Exercice 15

1) Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$. On définit $f : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ par

$$f(t) = \exp(tA).$$

1.a) Démontrer que f est continue.

1.b) Démontrer que f est dérivable et que sa dérivée $f' = df/dt$ vérifie

$$f'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

2) On suppose à présent que $A : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ est une fonction à valeurs matricielles de classe C^1 telle que

$$\forall\ t, s \in \mathbb{R}, \quad A(t)A(s) = A(s)A(t). \tag{1}$$

Démontrer que $f : t \mapsto \exp(A(t))$ est continue, dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = A'(t)\exp(A(t)) = \exp(A(t))A'(t). \tag{2}$$

3) On pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

3.a) Démontrer que la relation de commutation (1) n'est pas vérifiée.

3.b) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$A(t)^n = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=1}^n t^k \\ 0 & t^n \end{pmatrix}$$

et en déduire la valeur de $\exp(A(t))$.

3.c) Vérifier que la relation (2) n'est pas satisfaite.

Exercice 16

1) Soit $A \in GL(n, \mathbb{C})$ une matrice inversible. Démontrer que si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ il existe une matrice $B \in M(n, \mathbb{C})$ telle que

$$\exp(B) = A.$$

La matrice B est-elle unique ?

2) On suppose que A est *unipotente*, c'est-à-dire de la forme

$$A = I + N$$

où N est nilpotente d'ordre p (on rappele que cela signifie qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{p-1} \neq 0$ et $N^p = 0$).

2.a) En s'inspirant du développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$ on pose

$$B = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-N)^k}{k}.$$

Démontrer que cette série converge et vaut en fait

$$B = -\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-N)^k}{k}.$$

2.b) Démontrer que

$$\exp(B) = I + N = A.$$

3) Démontrer que si $A \in GL(n, \mathbb{C})$, il existe une matrice $B \in M(n, \mathbb{C})$ telle que

$$\exp(B) = A.$$

[On pourra démontrer au préalable que toute matrice inversible s'écrit sous la forme $A = S(I+N)$ où S est diagonalisable et inversible, N est nilpotente et S et N commutent.]

4)* Démontrer que si $A \in GL(n, \mathbb{R})$, il existe une matrice $B \in M(n, \mathbb{R})$ telle que

$$\exp(B) = A^2.$$

Calcul différentiel

Exercice 17 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, \epsilon) \mapsto x + \epsilon \sin x$$

1) On suppose qu'il existe une application $s : I \to \mathbb{R}$, de classe C^3, définie sur un intervalle ouvert centré en 0 et telle que $s(0) = 0$ et

$$\forall\, \epsilon \in I, \quad f(s(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Calculer le développement limité de s en 0 à l'ordre 2.

2) Expliquer pourquoi une telle application s existe.

Exercice 18 On pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sin(k^2 x).$$

Démontrer que f est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 1) Calculer la différentielle de $A \mapsto A^p$ pour $A \in M(n, \mathbb{R})$ (p entier positif). [On commencera par étudier le cas $p = 2$.]
2) Calculer la différentielle de $A \mapsto A^{-1}$ pour $A \in GL(n, \mathbb{R})$.
3) Calculer la différentielle de $A \mapsto \det(A)$ d'abord pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$ puis plus généralement pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.
4) On définit pour $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Démontrer que la fonction $\exp : A \mapsto e^A$ est C^∞ et calculer sa dérivée en $A = 0$.

Exercice 20 Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, telle que $f(0) = 0$ et que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, la différentielle $Df(x)$ est un endomorphisme orthogonal c'est-à-dire vérifie

$${}^tDf(x)Df(x) = I.$$

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute boule B centrée en x on a

$$\forall\ y \in B, \quad \|f(y) - f(x)\| \leqslant \|x - y\|.$$

2) 2.a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une boule ouverte B_x centrée en x telle que $f : B_x \to f(B_x)$ soit un difféomorphisme. [On pourra utiliser le théorème d'inversion locale.]
2.b) Expliquer pourquoi on peut trouver une boule $B'_{f(x)}$ centrée en $f(x)$ qui est envoyée dans B_x par f^{-1} (l'inverse pour la composition de f).
2.c) Déduire des questions précédentes que f est localement une isométrie : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une boule ouverte B''_x centrée en x telle que

$$\forall\ y \in B''_x, \quad \|f(y) - f(x)\| = \|x - y\|.$$

3) Démontrer que la différentielle de f est constante sur B''_x.

[Soit x fixé et $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de $\mathbb{R}^n$. En composant f à gauche par une isométrie *affine* R on peut supposer que $g := R^{-1} \circ f$ fixe x et les n points $x + re_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (où $r > 0$ est assez petit). Comme f est localement une isométrie g l'est également et préserve les produits scalaires : pour tout $y \in B''_x$ on a $\langle g(y) - g(x), re_i\rangle = \langle g(y) - g(x), g(x + re_i) - g(x)\rangle = \langle y - x, re_i\rangle$. Comme cela est vrai pour tout i on a $g(y) - g(x) = y - x$, d'où $f = R$.]

4) En déduire que f est un endomorphisme orthogonal.

Exercice 21 On note $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme du sup : $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
1) On définit pour $f \in E$ la fonction $\Phi_0(f)$ par

$$\Phi_0(f)(x) = \int_0^1 (t+x)^2 f(t)dt.$$

Démontrer que Φ_0 définit une application linéaire continue de E dans E. Quelle est sa dérivée ?
2) On définit pour $f \in E$ la fonction $\Phi_1(f)$ par

$$\Phi_1(f)(x) = \int_0^1 (t+x)^2 \sin(f(t))dt.$$

2.a) Démontrer $\Phi_1 : E \to E$, $f \mapsto \Phi_1(f)$ est une application continue.

2.a) Démontrer Φ_1 est une application dérivable et calculer sa dérivée.

Espaces de Banach, Théorème du point fixe, Inversion locale, Fonctions implicites.

Exercice 22 Soient E un espace de Banach et T une application linéaire continue de E dans E. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|T^k\| < 1$. Montrer que $(Id - T)$ est inversible et majorer la norme de $(Id - T)^{-1}$ en fonction de celle de T et T^k.

Exercice 23 Démontrer qu'il existe une unique fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in [0,1],\ f(x) = 1 + \int_0^1 \frac{f(t)}{100 + |t-x|} dt.$$

Exercice 24 1) Démontrer que l'équation fonctionnelle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100 f(t) = \sin(2\pi t)$$

admet une solution $f(\cdot)$ continue et 1-périodique.
2) On note $C^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ munie de la norme du sup. Montrer que les applications $T_\pm : C^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \circlearrowleft$ définies par $T_\pm f(\cdot) = f(\cdot \pm \sqrt{2})^2$ sont C^∞.

3) Démontrer qu'il existe une application $[-1,1] \to C_1^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\lambda \to f_\lambda$ de classe C^∞ telle que pour tout $\lambda \in [-1,1]$ f_λ soit solution de

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100f(t) = \lambda \sin(2\pi t).$$

Exercice 25 [Le théorème fondamental de l'algèbre.]

Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application polynomiale non constante. Notons $K = \{P(z) : DP(z) = 0\}$.

1) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'application $\nu : \mathbb{C}\backslash K \to \mathbb{N}$ définie par $\nu(\alpha) = \mathrm{card} P^{-1}(\alpha)$ est localement constante.

2) Montrer que $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe par arcs. En utilisant que ν ne peut être partout égale à 0, montrer que P est surjective.

3) En déduire que tout polynôme non constant sur $\mathbb{C}$ possède au moins une racine complexe (Théorème de d'Alembert-Gauss).

4) Quelle est la partie de la démonstration qui ne marche pas sur $\mathbb{R}$?

Exercice 26 Soit T une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, telle que $T(0) = 0$. On suppose de plus que 1 n'est pas valeur propre de $DT(0)$.

1) Montrer qu'il existe un voisinage U de 0, sur lequel 0 est l'unique point fixe de T, c'est-à-dire l'unique x tel que $T(x) = x$ (on utilisera le théorème d'inversion locale).

2) Soit S une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même quelconque. Montrer, en utilisant le théorème des fonctions implicites, qu'il existe un voisinage V de 0, un nombre λ_0 strictement positif tel que pour tout $|\lambda| \leqslant \lambda_0$, $T_\lambda(x) = T(x) + \lambda S(x)$ ait un unique point fixe x_λ sur V. On montrera de plus que $\lambda \mapsto x_\lambda$ est C^∞.

Exercice 27 [Lemme de Morse]

Le but de cet exercice est de démontrer le lemme suivant connu sous le nom de *lemme de Morse* (important en topologie différentielle) :

Lemme de Morse : *Soit Ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, $f \in C^3(\Omega,\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ et $A := D^2f(0) \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe des voisinages ouverts Ω', Ω'' de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un C^1-diffeomorphisme $h : \Omega' \to \Omega''$ tels que*

$$\forall\ x \in \Omega', \quad f \circ h(x) = \frac{1}{2}{}^t x A x.$$

1) Montrer qu'il existe $S \in C^1(\Omega, \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))$ telle que $S(0) = A$ et

$$\forall\ x \in \Omega, \quad f(x) = \frac{1}{2}{}^t x S(x) x.$$

2) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de A dans $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients réels) et une application $\psi \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ telle que

$$\forall\ B \in V, \quad B = {}^t\psi(B) A \psi(B).$$

[**Indication :** On pourra considérer l'application $\tau : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ définie par $\tau(M) = {}^t MAM$ et appliquer le théorème d'inversion locale à la restriction de τ à un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ bien choisi.]

3) Démontrer le Lemme de Morse.