

M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

01-08/12/2021

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonance paramétrique.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

- 1 Flots
 - Champs de vecteurs
 - Différentielle du flot et équation linéarisée
- 2 Application de premier retour
- 3 Stabilité
- 4 Portrait de phase en dimension 2

Nous passons à l'étude plus **géométrique** des équations différentielles.

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Flots

Nous passons à l'étude plus **géométrique** des équations différentielles.
Nous supposons que :

Nous passons à l'étude plus **géométrique** des équations différentielles.

Nous supposons que :

- $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$) : **Cauchy-Lipschitz** +
théorème de **dépendance différentiable**.

Nous passons à l'étude plus **géométrique** des équations différentielles.

Nous supposons que :

- $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$) : **Cauchy-Lipschitz** + théorème de **dépendance différentiable**.
- X est **complet** : $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \quad (1)$$

admet une sol. (donc unique) définie $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nous passons à l'étude plus **géométrique** des équations différentielles.

Nous supposons que :

- $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$) : **Cauchy-Lipschitz** + théorème de **dépendance différentiable**.
- X est **complet** : $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \quad (1)$$

admet une sol. (donc unique) définie $\forall t \in \mathbb{R}$.

On dit : X **champ de vecteurs** dépendant du temps, mais on préfère réserver la terminologie champ de vecteurs au cas où X ne dépend pas de t .

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Flots

Outil fondamental : théorème de dépendance différentiable (plus particulièrement par rapport aux conditions initiales) + linéarisation.

Outil fondamental : théorème de dépendance différentiable (plus particulièrement par rapport aux conditions initiales) + linéarisation.

Théorème (Théorème de dépendance différentiable et linéarisation)

- $\exists \mathcal{W} \in \text{Vois}_{(\lambda_0, v_0)}, \forall (\lambda, v) \in \mathcal{W}, \exists ! y_{\lambda, v}(\cdot)$ sol. de $(P.C.)_{\lambda, v}$ sur $[t_0, t_1]$
- $(\lambda, v) \mapsto y_{\lambda, v}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ *classe C^k* .
- *Dérivée* $(D_{v, \lambda} y)(v_0, \lambda_0) \cdot (\Delta v, \Delta \lambda) = \Delta y(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ sol. de l'EDO *affine*

$$\iff \begin{cases} (\Delta y)'(t) &= D_y X(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta y(t) + D_\lambda X(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta \lambda \\ \Delta y(t_0) &= \Delta v. \end{cases}$$

- Théorème de **dépendance différentiable par rapport à la condition initiale** $\implies \phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto$ la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est C^k .

- Théorème de **dépendance différentiable par rapport à la condition initiale** $\implies \phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto$ la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est C^k .

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \phi^{t,t_0}(x(t_0)) = x(t) \iff x(\cdot) \text{ solution de (1)}$$

- Théorème de **dépendance différentiable par rapport à la condition initiale** $\implies \phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto$ la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est C^k .

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \phi^{t,t_0}(x(t_0)) = x(t) \iff x(\cdot) \text{ solution de (1)}$$

- D'après le **théorème d'existence et d'unicité** on a pour tous t_0, t_1, t_2

$$\phi^{t_2,t_0} = \phi^{t_2,t_1} \circ \phi^{t_1,t_0} \quad (\text{Chasles})$$

- Théorème de **dépendance différentiable par rapport à la condition initiale** $\implies \phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto$ la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est C^k .

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \phi^{t,t_0}(x(t_0)) = x(t) \iff x(\cdot) \text{ solution de (1)}$$

- D'après le **théorème d'existence et d'unicité** on a pour tous t_0, t_1, t_2

$$\phi^{t_2,t_0} = \phi^{t_2,t_1} \circ \phi^{t_1,t_0} \quad (\text{Chasles})$$

- $\phi^{t,t_0}(\cdot)$ est un **C^k -difféomorphisme** : l'application ϕ^{t,t_0} est inversible, d'inverse $\phi^{t_0,t}$ qui est aussi de classe C^k .

- Théorème de **dépendance différentiable par rapport à la condition initiale** $\implies \phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto$ la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est C^k .

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \phi^{t,t_0}(x(t_0)) = x(t) \iff x(\cdot) \text{ solution de (1)}$$

- D'après le **théorème d'existence et d'unicité** on a pour tous t_0, t_1, t_2

$$\phi^{t_2,t_0} = \phi^{t_2,t_1} \circ \phi^{t_1,t_0} \quad (\text{Chasles})$$

- $\phi^{t,t_0}(\cdot)$ est un **C^k -difféomorphisme** : l'application ϕ^{t,t_0} est inversible, d'inverse $\phi^{t_0,t}$ qui est aussi de classe C^k .
- On dit que ϕ^{t,t_0} est le **flot** de X .

Le flot est l'**analogue non-linéaire de la résolvente**

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Flots

Le flot est l'**analogue non-linéaire de la résolvente**
mêmes propriétés, mêmes preuves :

Le flot est l'**analogue non-linéaire de la résolvente**

mêmes propriétés, mêmes preuves :

- Si X ne dépend pas de t on a $\phi^{t,t_0} = \phi^{t-t_0,0}$; on notera ϕ^t à la place de $\phi^{t,0}$. On a alors (**analogue de l'exponentielle**)

$$\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}.$$

Le flot est l'**analogue non-linéaire de la résolvente**
mêmes propriétés, mêmes preuves :

- Si X ne dépend pas de t on a $\phi^{t,t_0} = \phi^{t-t_0,0}$; on notera ϕ^t à la place de $\phi^{t,0}$. On a alors (**analogue de l'exponentielle**)

$$\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}.$$

- Si X dépend de façon **T -périodique** de t on a (comme pour la résolvente)

$$\phi^{t+T,t_0+T} = \phi^{t,t_0}$$

et aussi

$$\phi^{t+T,t} = \phi^t \circ \phi^{T,0} \circ \phi^{-t}.$$

- Quand $X(t, x) = A(t)x$ est **linéaire** on a $\phi^{t, t_0}(x) = R(t, t_0)x$.

- Quand $X(t, x) = A(t)x$ est **linéaire** on a $\phi^{t, t_0}(x) = R(t, t_0)x$.
- Si $X(t, x) = A(t)x + b(t)$ est **affine**, variation de la constante \implies
 $\phi^{t, t_0}(x) = R(t, t_0)x + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$.

- Quand $X(t, x) = A(t)x$ est **linéaire** on a $\phi^{t, t_0}(x) = R(t, t_0)x$.
- Si $X(t, x) = A(t)x + b(t)$ est **affine**, variation de la constante \implies
 $\phi^{t, t_0}(x) = R(t, t_0)x + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$.
- Le flot permet de caractériser facilement les **orbites périodiques** : $x(t)$
est une solution T -périodique ssi $\phi^T(x) = x$.

- Quand $X(t, x) = A(t)x$ est **linéaire** on a $\phi^{t, t_0}(x) = R(t, t_0)x$.
- Si $X(t, x) = A(t)x + b(t)$ est **affine**, variation de la constante \implies
 $\phi^{t, t_0}(x) = R(t, t_0)x + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$.
- Le flot permet de caractériser facilement les **orbites périodiques** : $x(t)$ est une solution T -périodique ssi $\phi^T(x) = x$.
- **Point singulier** : si $X(x_0) = 0$ alors, $x(\cdot) \equiv x_0$ est solution et $\phi^t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est un **point singulier** (ou point d'équilibre) de X (si $X(x_0) \neq 0$ on dit que x_0 est régulier).

- Quand $X(t, x) = A(t)x$ est **linéaire** on a $\phi^{t, t_0}(x) = R(t, t_0)x$.
- Si $X(t, x) = A(t)x + b(t)$ est **affine**, variation de la constante \implies
 $\phi^{t, t_0}(x) = R(t, t_0)x + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$.
- Le flot permet de caractériser facilement les **orbites périodiques** : $x(t)$ est une solution T -périodique ssi $\phi^T(x) = x$.
- **Point singulier** : si $X(x_0) = 0$ alors, $x(\cdot) \equiv x_0$ est solution et $\phi^t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est un **point singulier** (ou point d'équilibre) de X (si $X(x_0) \neq 0$ on dit que x_0 est régulier).
- **Orbite** (resp. orbite positive, après le temps t) de $x_0 \in \Omega$ l'ensemble $\mathcal{O}(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ (resp. $\mathcal{O}^+(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \geq 0\}$,
 $\mathcal{O}^{\geq t}(x_0) = \{\phi^s(x_0) : s \geq t\}$)

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Différentielle du flot et équation linéarisée

Théorème de dépendance différentiable par rapport à la **condition initiale**
+ **linéarisation** \implies

Théorème de dépendance différentiable par rapport à la **condition initiale**
+ **linéarisation** \implies

Proposition

Si $R(t, t_0)$ est la résolvante de l'équation linéarisée le long de $x_0(t)$:

$$v'(t) = DX(t, x_0(t)) \cdot v(t)$$

on a

$$D\phi^{t, t_0}(x_0) = R(t, t_0).$$

Notion de flot : E.D.O. \leftrightarrow difféomorphisme(s) : plus géométrique.
:

Notion de flot : E.D.O. \leftrightarrow **difféomorphisme(s)** : plus géométrique.

Dynamique d'un difféo = itérations de compositions :

Notion de flot : E.D.O. \leftrightarrow **difféomorphisme(s)** : plus géométrique.

Dynamique d'un difféo = itérations de compositions : pas forcément plus simple que celle d'un champ de vecteurs.

Notion de flot : E.D.O. \leftrightarrow **difféomorphisme(s)** : plus géométrique.

Dynamique d'un difféo = itérations de compositions : pas forcément plus simple que celle d'un champ de vecteurs.

Application de premier retour Poincaré :

Notion de flot : E.D.O. \leftrightarrow **difféomorphisme(s)** : plus géométrique.

Dynamique d'un difféo = itérations de compositions : pas forcément plus simple que celle d'un champ de vecteurs.

Application de premier retour Poincaré : un autre exemple EDO \leftrightarrow difféo mais avec diminution de la dim. de l'espace des phases.

Sommaire Plan du cours 9

- 1 Flots
- 2 Application de premier retour
 - Définition
 - Application à la stabilité
- 3 Stabilité
- 4 Portrait de phase en dimension 2

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

- $X(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, (Ω ouvert de \mathbb{R}^n) un champ de vecteurs

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

- $X(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, (Ω ouvert de \mathbb{R}^n) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

- $X(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, (Ω ouvert de \mathbb{R}^n) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$
- Σ ouvert d'un hyperplan (dimension $n - 1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$:

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

- $X(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, (Ω ouvert de \mathbb{R}^n) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$
- Σ ouvert d'un **hyperplan** (dimension $n - 1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$:
- on dit que la **section** Σ ($x_0 \in \Sigma$) est **transverse** à l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ de x_0 en x_0 .

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

- $X(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, (Ω ouvert de \mathbb{R}^n) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$
- Σ ouvert d'un **hyperplan** (dimension $n - 1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$:
- on dit que la **section** Σ ($x_0 \in \Sigma$) est **transverse** à l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ de x_0 en x_0 .

Temps de premier retour

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

- $X(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, (Ω ouvert de \mathbb{R}^n) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$
- Σ ouvert d'un hyperplan (dimension $n - 1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$:
- on dit que la section Σ ($x_0 \in \Sigma$) est **transverse** à l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ de x_0 en x_0 .

Temps de premier retour de x_0 sur Σ (si \exists) :

$$\tau_0 = \min\{t > 0 : \phi^t(x_0) \in \Sigma\}$$

(transversalité $\implies \tau_0 > 0$, l'inf est un min).

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

- $X(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, (Ω ouvert de \mathbb{R}^n) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$
- Σ ouvert d'un **hyperplan** (dimension $n - 1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$:
- on dit que la **section** Σ ($x_0 \in \Sigma$) est **transverse** à l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ de x_0 en x_0 .

Temps de premier retour de x_0 sur Σ (si \exists) :

$$\tau_0 = \min\{t > 0 : \phi^t(x_0) \in \Sigma\}$$

(transversalité $\implies \tau_0 > 0$, l'inf est un min).

On dit alors que

$\phi^{\tau_0}(x_0)$ est le **premier retour** de x_0 sur Σ .

Théorème

Si $\tau_0(x_0)$ existe :

- $\exists W = U \cap \Sigma$ vois. ouvert de x_0 dans Σ (U ouvert de Ω contenant x_0) et une appl. $\tau : W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tq $\forall u \in W$, $\tau(u) =$ temps de premier retour de u sur Σ .

Théorème

Si $\tau_0(x_0)$ existe :

- $\exists W = U \cap \Sigma$ vois. ouvert de x_0 dans Σ (U ouvert de Ω contenant x_0) et une appl. $\tau : W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tq $\forall u \in W$, $\tau(u) =$ temps de premier retour de u sur Σ .
- L'appl. $P : W \rightarrow \Sigma : P(u) = \phi^{\tau(u)}(u)$ classe $C^k =$ l'application de premier retour de Poincaré. P est un **difféomorphisme** de W sur son image.

Théorème

Si $\tau_0(x_0)$ existe :

- $\exists W = U \cap \Sigma$ vois. ouvert de x_0 dans Σ (U ouvert de Ω contenant x_0) et une appl. $\tau : W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tq $\forall u \in W$, $\tau(u) =$ temps de premier retour de u sur Σ .
- L'appl. $P : W \rightarrow \Sigma : P(u) = \phi^{\tau(u)}(u)$ classe $C^k =$ l'application de premier retour de Poincaré. P est un **difféomorphisme** de W sur son image.
- Si $X_\epsilon(\cdot)$ dépend C^k d'un **param.** $\epsilon \implies$ si ϵ petit, W indep. de ϵ et τ_ϵ , P_ϵ pour X_ϵ et Σ dépendent C^k de ϵ .

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

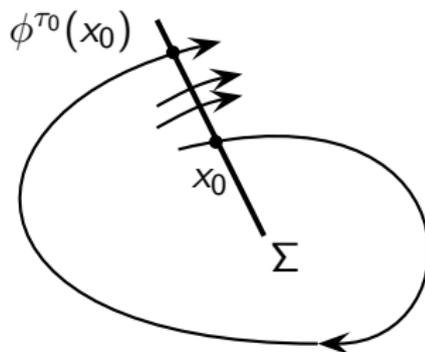


FIGURE: L'application de Poincaré : $P(x_0) = \phi^{\tau_0}(x_0)$

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

Démonstration :

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

Démonstration : (i)

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

Démonstration : (i)

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{T_0}(x_0),$

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,
- p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,
- p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ
- \tilde{p} la projection sur Σ parallèlement à $X(x_1)$.

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,
- p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ
- \tilde{p} la projection sur Σ parallèlement à $X(x_1)$.
- $\psi : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ l'application à valeurs dans \mathbb{R} , définie au voisinage de $(\tau_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ par $\psi(t, u) = p_1(\phi^t(u))$.

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,
- p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ
- \tilde{p} la projection sur Σ parallèlement à $X(x_1)$.
- $\psi : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ l'application à valeurs dans \mathbb{R} , définie au voisinage de $(\tau_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ par $\psi(t, u) = p_1(\phi^t(u))$.
-

$$\psi(t, u) = 0 \iff \phi^t(u) \in \Sigma$$

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,
- p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ
- \tilde{p} la projection sur Σ parallèlement à $X(x_1)$.
- $\psi : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ l'application à valeurs dans \mathbb{R} , définie au voisinage de $(\tau_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ par $\psi(t, u) = p_1(\phi^t(u))$.
-

$$\psi(t, u) = 0 \iff \phi^t(u) \in \Sigma$$

On applique **théorème des fonctions implicites**

$$\psi(t, u) = 0 \iff t = \tau(u).$$

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

- $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$ ($t_0 = \tau_0$).

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

- $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$ ($t_0 = \tau_0$).
- S'il existe un autre temps $t_1(x) < \tau(x)$ tel que $\phi^{t_1(x)}(x) \in \Sigma$ on a donc $t_1(x) < \tau_0 - \delta$.

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

- $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$ ($t_0 = \tau_0$).
- S'il existe un autre temps $t_1(x) < \tau(x)$ tel que $\phi^{t_1(x)}(x) \in \Sigma$ on a donc $t_1(x) < \tau_0 - \delta$.
- S'il existait une infinité de tels $x \in \Sigma$ on aurait une suite $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in \Sigma$ et $0 < t_n < t_0 - \delta$ tels que $\phi^{t_n}(x_n) \in \Sigma$.

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

- $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$ ($t_0 = \tau_0$).
- S'il existe un autre temps $t_1(x) < \tau(x)$ tel que $\phi^{t_1(x)}(x) \in \Sigma$ on a donc $t_1(x) < \tau_0 - \delta$.
- S'il existait une infinité de tels $x \in \Sigma$ on aurait une suite $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in \Sigma$ et $0 < t_n < t_0 - \delta$ tels que $\phi^{t_n}(x_n) \in \Sigma$.
- Quitte à extraire une sous-suite, cela donnerait un $t_* \leq t_0 - \delta$ tel que $\phi^{t_*}(x_0) \in \Sigma$.

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

- $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$ ($t_0 = \tau_0$).
- S'il existe un autre temps $t_1(x) < \tau(x)$ tel que $\phi^{t_1(x)}(x) \in \Sigma$ on a donc $t_1(x) < \tau_0 - \delta$.
- S'il existait une infinité de tels $x \in \Sigma$ on aurait une suite $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in \Sigma$ et $0 < t_n < t_0 - \delta$ tels que $\phi^{t_n}(x_n) \in \Sigma$.
- Quitte à extraire une sous-suite, cela donnerait un $t_* \leq t_0 - \delta$ tel que $\phi^{t_*}(x_0) \in \Sigma$.
- Cela contredit la minimalité de τ_0 .

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \rightarrow \Sigma : P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \rightarrow \Sigma : P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$DP(x_0) = \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma}$$

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \rightarrow \Sigma : P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$\begin{aligned} DP(x_0) &= \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma} \\ &= \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma} \quad (\text{car } \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0))) = 0). \end{aligned}$$

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \rightarrow \Sigma : P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$\begin{aligned} DP(x_0) &= \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma} \\ &= \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma} \quad (\text{car } \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0))) = 0). \end{aligned}$$

L'application $DP(u_0) : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est **injective**

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \rightarrow \Sigma : P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$\begin{aligned} DP(x_0) &= \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma} \\ &= \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma} \quad (\text{car } \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0))) = 0). \end{aligned}$$

L'application $DP(u_0) : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est **injective**

Le théorème d'**inversion locale** s'applique.

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \rightarrow \Sigma : P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$\begin{aligned} DP(x_0) &= \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma} \\ &= \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma} \quad (\text{car } \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0))) = 0). \end{aligned}$$

L'application $DP(u_0) : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est **injective**

Le théorème d'**inversion locale** s'applique.

La partie sur la dépendance C^k en ϵ ne pose pas de problème. □

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Des relations

$$DP(x_0) = \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma}, \quad D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot X(x_0) = X(\phi^{\tau_0}(x_0))$$

on tire davantage d'information sur P

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Des relations

$$DP(x_0) = \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma}, \quad D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot X(x_0) = X(\phi^{\tau_0}(x_0))$$

on tire davantage d'information sur P

Théorème

Si $\phi_X^t(x_0)$ est τ_0 -périodique, la différentielle $DP(x_0)$ dans une base dont le premier vecteur est $X(x_0)$ et dont les autres sont dans Σ est reliée à celle de $D\phi_X^{\tau_0}(x_0)$ par

$$D\phi_X^{\tau_0}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & DP(x_0) \end{pmatrix}.$$

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Des relations

$$DP(x_0) = \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma}, \quad D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot X(x_0) = X(\phi^{\tau_0}(x_0))$$

on tire davantage d'information sur P

Théorème

Si $\phi_X^t(x_0)$ est τ_0 -périodique, la différentielle $DP(x_0)$ dans une base dont le premier vecteur est $X(x_0)$ et dont les autres sont dans Σ est reliée à celle de $D\phi_X^{\tau_0}(x_0)$ par

$$D\phi_X^{\tau_0}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & DP(x_0) \end{pmatrix}.$$

Remarque :

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Des relations

$$DP(x_0) = \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)|_{\Sigma}, \quad D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot X(x_0) = X(\phi^{\tau_0}(x_0))$$

on tire davantage d'information sur P

Théorème

Si $\phi_X^t(x_0)$ est τ_0 -périodique, la différentielle $DP(x_0)$ dans une base dont le premier vecteur est $X(x_0)$ et dont les autres sont dans Σ est reliée à celle de $D\phi_X^{\tau_0}(x_0)$ par

$$D\phi_X^{\tau_0}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & DP(x_0) \end{pmatrix}.$$

Remarque : cf. $D\phi_X^{\tau_0}(x_0) = R(\tau_0, 0)$ où $R =$ résolvante du système linéarisé $v'(t) = DX(\phi^t(x_0)) \cdot v(t)$ (le long de l'orbite de x_0)

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

- $x_0(\cdot)$ sol. T -per. de $\dot{x}(t) = X(x(t))$.

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

- $x_0(\cdot)$ sol. T -per. de $\dot{x}(t) = X(x(t))$.
- $\mathcal{O}(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ (resp. $\mathcal{O}^+(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \geq 0\}$,
 $\mathcal{O}^{\geq t}(x_0) = \{\phi^s(x_0) : s \geq t\}$) l'orbite (resp. positive, après le temps t)
de x_0 ,

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

- $x_0(\cdot)$ sol. T -per. de $\dot{x}(t) = X(x(t))$.
- $\mathcal{O}(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ (resp. $\mathcal{O}^+(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \geq 0\}$,
 $\mathcal{O}^{\geq t}(x_0) = \{\phi^s(x_0) : s \geq t\}$) l'orbite (resp. positive, après le temps t)
de x_0 ,
- Σ un (ouvert d'un) hyperplan transverse à $X(x_0)$ en $x_0 = x_0(0)$

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

- $x_0(\cdot)$ sol. T -per. de $\dot{x}(t) = X(x(t))$.
- $\mathcal{O}(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ (resp. $\mathcal{O}^+(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \geq 0\}$,
 $\mathcal{O}^{\geq t}(x_0) = \{\phi^s(x_0) : s \geq t\}$) l'orbite (resp. positive, après le temps t)
de x_0 ,
- Σ un (ouvert d'un) hyperplan transverse à $X(x_0)$ en $x_0 = x_0(0)$
- P l'appl. de 1er retour de Poincaré (pour Σ) au vois. de x_0 .

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

- $x_0(\cdot)$ sol. T -per. de $\dot{x}(t) = X(x(t))$.
- $\mathcal{O}(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ (resp. $\mathcal{O}^+(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \geq 0\}$, $\mathcal{O}^{\geq t}(x_0) = \{\phi^s(x_0) : s \geq t\}$) l'orbite (resp. positive, après le temps t) de x_0 ,
- Σ un (ouvert d'un) hyperplan transverse à $X(x_0)$ en $x_0 = x_0(0)$
- P l'appl. de 1er retour de Poincaré (pour Σ) au vois. de x_0 .

On a $P(x_0) = x_0$: comportement des orbites proches ?

Proposition

Si $\forall x \in W$, $P^n(x) \rightarrow x_0$ quand $n \rightarrow \infty$ alors $\text{dist}(\mathcal{O}^{\geq t}(x), \mathcal{O}(x_0)) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. On dit que $\mathcal{O}(x_0)$ est une orbite périodique attractive.

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Démonstration :

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Démonstration : Notons $x_k = P^k(x)$. On a $P^n(x) = \phi^{\tau_n}(x)$ où

$$\tau_n = \tau(x) + \tau(x_1) + \cdots + \tau(x_n).$$

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Démonstration : Notons $x_k = P^k(x)$. On a $P^n(x) = \phi^{\tau_n}(x)$ où

$$\tau_n = \tau(x) + \tau(x_1) + \cdots + \tau(x_n).$$

- $\tau(y)$ proche de $\tau(x_0) = \tau_0$, si y proche de $x_0 \implies \tau_n \geq n(\tau_0 - \epsilon)$ pour $\epsilon >$ petit.

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Démonstration : Notons $x_k = P^k(x)$. On a $P^n(x) = \phi^{\tau_n}(x)$ où

$$\tau_n = \tau(x) + \tau(x_1) + \cdots + \tau(x_n).$$

- $\tau(y)$ proche de $\tau(x_0) = \tau_0$, si y proche de $x_0 \implies \tau_n \geq n(\tau_0 - \epsilon)$ pour $\epsilon >$ petit.
- Donc $\tau_n \rightarrow \infty$.

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Démonstration : Notons $x_k = P^k(x)$. On a $P^n(x) = \phi^{\tau_n}(x)$ où

$$\tau_n = \tau(x) + \tau(x_1) + \cdots + \tau(x_n).$$

- $\tau(y)$ proche de $\tau(x_0) = \tau_0$, si y proche de $x_0 \implies \tau_n \geq n(\tau_0 - \epsilon)$ pour $\epsilon >$ petit.
- Donc $\tau_n \rightarrow \infty$.
- En outre, $\tau_n - \tau_{n-1}$ est borné par $\tau_0 + \epsilon$

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Démonstration : Notons $x_k = P^k(x)$. On a $P^n(x) = \phi^{\tau_n}(x)$ où

$$\tau_n = \tau(x) + \tau(x_1) + \cdots + \tau(x_n).$$

- $\tau(y)$ proche de $\tau(x_0) = \tau_0$, si y proche de $x_0 \implies \tau_n \geq n(\tau_0 - \epsilon)$ pour $\epsilon >$ petit.
- Donc $\tau_n \rightarrow \infty$.
- En outre, $\tau_n - \tau_{n-1}$ est borné par $\tau_0 + \epsilon$
- théorème de dépendance continue des orbites \implies
 $\max_{s \in [\tau_{n-1}, \tau_n]} \|\phi^s(x) - \phi^s(x_0)\| \rightarrow 0$ qd $\|x_{n-1} - x_0\| \rightarrow 0$. □

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

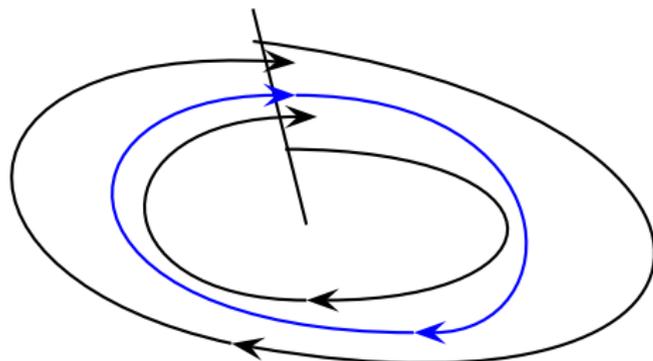


FIGURE: Orbite périodique attractive

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Comment vérifier l'hypothèse de la proposition précédente ?

Comment vérifier l'hypothèse de la proposition précédente ?

- Le difféo $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ au voisi. de x_0 :

$$P(x) = x_0 + DP(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2).$$

Comment vérifier l'hypothèse de la proposition précédente ?

- Le difféo $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ au voisi. de x_0 :

$$P(x) = x_0 + DP(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2).$$

- Dynamique (l'itération) de ce difféo qd $\dim \Sigma = 1$ et si $DP(x_0) = P'(x_0)$ (le multiplicateur) est différent de ± 1 (p.ex. $\lambda = P'(x_0)$ et supposons $|\lambda| < 1$).

Comment vérifier l'hypothèse de la proposition précédente ?

- Le difféo $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ au voisi. de x_0 :

$$P(x) = x_0 + DP(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2).$$

- Dynamique (l'itération) de ce difféo qd $\dim \Sigma = 1$ et si $DP(x_0) = P'(x_0)$ (le **multiplicateur**) est différent de ± 1 (p.ex. $\lambda = P'(x_0)$ et supposons $|\lambda| < 1$).
- Si on pose $u_n = |P^n(x) - x_0|$, on a pour

$$u_{n+1} \leq \lambda u_n + O(u_n^2).$$

$$u_{n+1} \leq (\lambda + \epsilon)u_n$$

Comment vérifier l'hypothèse de la proposition précédente ?

- Le difféo $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ au voisi. de x_0 :

$$P(x) = x_0 + DP(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2).$$

- Dynamique (l'itération) de ce difféo qd $\dim \Sigma = 1$ et si $DP(x_0) = P'(x_0)$ (le **multiplicateur**) est différent de ± 1 (p.ex. $\lambda = P'(x_0)$ et supposons $|\lambda| < 1$).
- Si on pose $u_n = |P^n(x) - x_0|$, on a pour

$$u_{n+1} \leq \lambda u_n + O(u_n^2).$$

$$u_{n+1} \leq (\lambda + \epsilon) u_n$$

- $\implies u_n$ converge exponentiellement vite vers 0 (car $|\lambda + \epsilon| < 1$).

En dimension plus grande, on dispose du critère suivant

Proposition

Si toutes les valeurs propres de $DP(x_0)$ sont de module < 1 , alors pour tout x suffisamment proche de x_0 , $P^n(x)$ converge vers x_0 exponentiellement vite quand $n \rightarrow \infty$.

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Démonstration.-Il existe une norme N sur Σ et $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$\forall v \in \Sigma, N(DP(x_0) \cdot v) \leq \lambda N(v).$$

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Démonstration.-Il existe une norme N sur Σ et $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$\forall v \in \Sigma, N(DP(x_0) \cdot v) \leq \lambda N(v).$$

Il suffit en effet de prendre

$$N(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|DP^k(x_0) \cdot v\|}{\lambda^k}$$

pour $\lambda < \text{rayon spectral}(DP(x_0)) < 1$.

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application à la stabilité

Démonstration.-Il existe une norme N sur Σ et $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$\forall v \in \Sigma, N(DP(x_0) \cdot v) \leq \lambda N(v).$$

Il suffit en effet de prendre

$$N(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|DP^k(x_0) \cdot v\|}{\lambda^k}$$

pour $\lambda < \text{rayon spectral}(DP(x_0)) < 1$.

On a, comme en dimension 1, $u_{n+1} \leq \lambda u_n + O(u_n^2)$ si on pose $u_n = N(P^n(x) - x_0)$. □

Sommaire Plan du cours 9

- 1 Flots
- 2 Application de premier retour
- 3 Stabilité**
 - Critère de Routh
 - Fonctions de Lyapunov
- 4 Portrait de phase en dimension 2

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, x_0 point singulier de $X : X(x_0) = 0$.

Théorème (Critère de Routh non-linéaire)

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x_0) = 0 \\ \forall \lambda \in \text{spec}(DX(x_0)), \Re \lambda < 0 \end{array} \right. \implies x_0 \text{ pt d'éq. } \textit{asympt. stable} \text{ qd } t \rightarrow \infty.$$

Démonstration

Démonstration Supposons $x_0 = 0$. On a $D\phi^T(0) = e^{TDX(0)}$.

Démonstration Supposons $x_0 = 0$. On a $D\phi^T(0) = e^{TDX(0)}$.
D'après l'hypothèse, $e^{TDX(0)} \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow \infty$. Donc il existe un T
pour lequel $\|e^{TDX(0)}\| < 1/2$.

Démonstration Supposons $x_0 = 0$. On a $D\phi^T(0) = e^{TDX(0)}$.

D'après l'hypothèse, $e^{TDX(0)} \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow \infty$. Donc il existe un T pour lequel $\|e^{TDX(0)}\| < 1/2$.

Comme $\phi^T(x) = D\phi^T(0) \cdot x + o(x)$ on a pour $\|x\|$ suffisamment petit

$$\|\phi^T(x)\| \leq (3/4)\|x\|.$$

Démonstration Supposons $x_0 = 0$. On a $D\phi^T(0) = e^{TDX(0)}$.

D'après l'hypothèse, $e^{TDX(0)} \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow \infty$. Donc il existe un T pour lequel $\|e^{TDX(0)}\| < 1/2$.

Comme $\phi^T(x) = D\phi^T(0) \cdot x + o(x)$ on a pour $\|x\|$ suffisamment petit

$$\|\phi^T(x)\| \leq (3/4)\|x\|.$$

Ainsi, $\phi^{nT}(x)$ tend exponentiellement vite vers 0.

Démonstration Supposons $x_0 = 0$. On a $D\phi^T(0) = e^{TDX(0)}$.

D'après l'hypothèse, $e^{TDX(0)} \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow \infty$. Donc il existe un T pour lequel $\|e^{TDX(0)}\| < 1/2$.

Comme $\phi^T(x) = D\phi^T(0) \cdot x + o(x)$ on a pour $\|x\|$ suffisamment petit

$$\|\phi^T(x)\| \leq (3/4)\|x\|.$$

Ainsi, $\phi^{nT}(x)$ tend exponentiellement vite vers 0.

Si on écrit $\phi^t(x) = \phi^{t-nT} \circ \phi^{nT}(x)$, $0 \leq t - nT \leq T$ on voit que $\phi^t(x)$ tend vers 0. □

Stabilité des orbites périodiques cas autonome

$x'(t) = X(x(t))$ et $\phi_X^t(x_0)$ est une orbite périodique.

Stabilité des orbites périodiques cas autonome

$x'(t) = X(x(t))$ et $\phi_X^t(x_0)$ est une orbite périodique.

Théorème (Critère de Routh non-linéaire, cas autonome)

Si la *résolvante* $R(T, 0)$ de l'éq. linéarisée au vois. de l'orb. pér. $(\phi^{t,0}(x_0))$

$$\dot{v}(t) = D_x X(\phi^t(x_0)) \cdot v(t)$$

a $n - 1$ v.p. de *module* < 1 , alors l'orb. pér. $(\phi^t(x_0))$ est (orbitalement) *asymptotiquement stable* quand $t \rightarrow \infty$.

Stabilité des orbites périodiques cas autonome

$x'(t) = X(x(t))$ et $\phi_X^t(x_0)$ est une orbite périodique.

Théorème (Critère de Routh non-linéaire, cas autonome)

Si la *résolvante* $R(T, 0)$ de l'éq. linéarisée au vois. de l'orb. pér. $(\phi^{t,0}(x_0))$

$$\dot{v}(t) = D_x X(\phi^t(x_0)) \cdot v(t)$$

à $n - 1$ v.p. de *module* < 1 , alors l'orb. pér. $(\phi^t(x_0))$ est (orbitalement) *asymptotiquement stable* quand $t \rightarrow \infty$.

Démonstration :

Stabilité des orbites périodiques cas autonome

$x'(t) = X(x(t))$ et $\phi_X^t(x_0)$ est une orbite périodique.

Théorème (Critère de Routh non-linéaire, cas autonome)

Si la *résolvante* $R(T, 0)$ de l'éq. linéarisée au vois. de l'orb. pér. $(\phi^{t,0}(x_0))$

$$\dot{v}(t) = D_x X(\phi^t(x_0)) \cdot v(t)$$

a $n - 1$ v.p. de *module* < 1 , alors l'orb. pér. $(\phi^t(x_0))$ est (orbitalement) *asymptotiquement stable* quand $t \rightarrow \infty$.

Démonstration : en effet

$$D\phi_X^{T_0}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & DP(x_0) \end{pmatrix}$$

où P est l'application de Poincaré. □

Stabilité des orbites périodiques pour des EDO périodiques

EDO $x'(t) = X(t, x(t))$ où $\forall x; X(\cdot + T, x) = X(\cdot, x)$ et $\phi_X^{t,0}(x_0)$ est une orb. pér.

Stabilité des orbites périodiques pour des EDO périodiques

EDO $x'(t) = X(t, x(t))$ où $\forall x; X(\cdot + T, x) = X(\cdot, x)$ et $\phi_X^{t,0}(x_0)$ est une orb. pér.

Théorème (Critère de Routh non-linéaire pour les E.D.O. périodiques)

Si la *résolvante* $R(T, 0)$ de l'éq. linéarisée au vois. de l'orb. pér. $(\phi^{t,0}(x_0))$

$$\dot{v}(t) = D_x X(t, \phi^{t,0}(x_0)) \cdot v(t)$$

à *toutes* ses v.p. de *module* < 1 , alors l'orb. pér. $(\phi^{t,0}(x_0))$ est (orbitalement) *asymptotiquement stable* qd $t \rightarrow \infty$.

Stabilité des orbites périodiques pour des EDO périodiques

EDO $x'(t) = X(t, x(t))$ où $\forall x; X(\cdot + T, x) = X(\cdot, x)$ et $\phi_X^{t,0}(x_0)$ est une orb. pér.

Théorème (Critère de Routh non-linéaire pour les E.D.O. périodiques)

Si la *résolvante* $R(T, 0)$ de l'éq. linéarisée au vois. de l'orb. pér. $(\phi^{t,0}(x_0))$

$$\dot{v}(t) = D_x X(t, \phi^{t,0}(x_0)) \cdot v(t)$$

à *toutes* ses v.p. de *module* < 1 , alors l'orb. pér. $(\phi^{t,0}(x_0))$ est (orbitalement) *asymptotiquement stable* qd $t \rightarrow \infty$.

Remarque

Stabilité des orbites périodiques pour des EDO périodiques

EDO $x'(t) = X(t, x(t))$ où $\forall x; X(\cdot + T, x) = X(\cdot, x)$ et $\phi_X^{t,0}(x_0)$ est une orb. pér.

Théorème (Critère de Routh non-linéaire pour les E.D.O. périodiques)

Si la *résolvante* $R(T, 0)$ de l'éq. linéarisée au vois. de l'orb. pér. $(\phi^{t,0}(x_0))$

$$\dot{v}(t) = D_x X(t, \phi^{t,0}(x_0)) \cdot v(t)$$

à *toutes* ses v.p. de *module* < 1 , alors l'orb. pér. $(\phi^{t,0}(x_0))$ est (orbitalement) *asymptotiquement stable* qd $t \rightarrow \infty$.

Remarque Se déduit du cas autonome en considérant l'appl. de Poincaré de $\tilde{X}(\tilde{x}) := (1, X(t, x))$ (où $\tilde{x} = (t, x)$) défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pour la section $\tilde{\Sigma} := \{0\} \times \mathbb{R}^n$. On a alors $R_X(T, 0) = D\tilde{P}(\tilde{x}_0)$ ($\tilde{x}_0 = (0, x_0)$).

Démonstration

Démonstration Donnons une autre preuve. On a $D\phi^{T,0} = R(T, 0)$.

Démonstration Donnons une autre preuve. On a $D\phi^{T,0} = R(T,0)$.

On a vu qu'il existait une norme N et $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$\forall v \in \Sigma, N(R(T,0) \cdot v) \leq \lambda N(v).$$

Démonstration Donnons une autre preuve. On a $D\phi^{T,0} = R(T,0)$.
On a vu qu'il existait une norme N et $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$\forall v \in \Sigma, N(R(T,0) \cdot v) \leq \lambda N(v).$$

(Il suffit en effet de prendre $N(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \|DP^k(x_0) \cdot v\|$ pour $\lambda < \text{rayon spectral}(DP(x_0)) < 1$.)

Démonstration Donnons une autre preuve. On a $D\phi^{T,0} = R(T,0)$.
On a vu qu'il existait une norme N et $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$\forall v \in \Sigma, N(R(T,0) \cdot v) \leq \lambda N(v).$$

(Il suffit en effet de prendre $N(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \|DP^k(x_0) \cdot v\|$ pour $\lambda < \text{rayon spectral}(DP(x_0)) < 1$.)

Donc $N(\Phi^{T,0}(x)) \leq \lambda N(v) + o(N(v)) \leq (\lambda + \epsilon)N(v)$ si $\|v\|$ suffisamment petit.

Démonstration Donnons une autre preuve. On a $D\phi^{T,0} = R(T,0)$.
On a vu qu'il existait une norme N et $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$\forall v \in \Sigma, N(R(T,0) \cdot v) \leq \lambda N(v).$$

(Il suffit en effet de prendre $N(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \|DP^k(x_0) \cdot v\|$ pour $\lambda < \text{rayon spectral}(DP(x_0)) < 1$.)

Donc $N(\phi^{T,0}(x)) \leq \lambda N(v) + o(N(v)) \leq (\lambda + \epsilon)N(v)$ si $\|v\|$ suffisamment petit.

Ainsi, $N(\phi^{nT,0}(x))$ tend vers 0 exponentiellement vite. ($\phi^{nT,0} = (\phi^{T,0})^n$ (itéré n -fois)).

Démonstration Donnons une autre preuve. On a $D\phi^{T,0} = R(T,0)$.
On a vu qu'il existait une norme N et $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$\forall v \in \Sigma, N(R(T,0) \cdot v) \leq \lambda N(v).$$

(Il suffit en effet de prendre $N(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \|DP^k(x_0) \cdot v\|$ pour $\lambda < \text{rayon spectral}(DP(x_0)) < 1$.)

Donc $N(\Phi^{T,0}(x)) \leq \lambda N(v) + o(N(v)) \leq (\lambda + \epsilon)N(v)$ si $\|v\|$ suffisamment petit.

Ainsi, $N(\phi^{nT,0}(x))$ tend vers 0 exponentiellement vite. ($\phi^{nT,0} = (\phi^{T,0})^n$ (itéré n -fois)).

Si on écrit $\phi^{t,0}(x) = \phi^{t-nT,0} \circ \phi^{nT,0}(x)$, $0 \leq t - nT \leq T$ on voit que $\phi^{t,0}(x)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. □

Fonctions de Lyapunov

Définition

On peut donner des critères plus généraux grâce à la notion de fonctions de Lyapunov.

Définition (Fonctions de Lyapunov)

Soit x_0 un zéro d'un champ de vecteurs $X(\cdot)$ et U un voisinage de x_0 . Une fonction continue $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de **Lyapunov** si

- L atteint son minimum sur U en un unique point qui est x_0 ;
- pour tout $x \neq x_0$, la fonction $t \mapsto L(\phi_X^t(x))$ est strictement décroissante sur son domaine de définition.

Remarque

Fonctions de Lyapunov

Définition

On peut donner des critères plus généraux grâce à la notion de fonctions de Lyapunov.

Définition (Fonctions de Lyapunov)

Soit x_0 un zéro d'un champ de vecteurs $X(\cdot)$ et U un voisinage de x_0 . Une fonction continue $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de **Lyapunov** si

- L atteint son minimum sur U en un unique point qui est x_0 ;
- pour tout $x \neq x_0$, la fonction $t \mapsto L(\phi_X^t(x))$ est strictement décroissante sur son domaine de définition.

Remarque La seconde condition est en particulier vérifiée quand L est C^1 si $\langle \nabla L(x), X(x) \rangle < 0$ pour tout $x \neq x_0$.

Théorème

Si X est tel que $X(x_0) = 0$ et admet une fonction de Lyapunov en x_0 alors, x_0 est un équilibre asymptotiquement stable de X (quand $t \rightarrow \infty$).

Sommaire Plan du cours 9

- 1 Flots
- 2 Application de premier retour
- 3 Stabilité
- 4 Portrait de phase en dimension 2**
 - Perturbations des appl. conservatives
 - Le théorème de Poincaré-Bendixon

Portraits de phase en dimension 2

Applications conservatives

Nous étudions à présent un exemple important qui intervient en Mécanique et en Physique.

Portraits de phase en dimension 2

Applications conservatives

Nous étudions à présent un exemple important qui intervient en Mécanique et en Physique.

Soit une particule de masse 1 se déplaçant en dimension 1 (q position, p impulsion) dans un champ de potentiel $V(q)$:

$$\ddot{q} = -\nabla V(q)$$

ou sous forme d'E.D.O d'ordre 1

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\nabla V(q) \end{cases}$$

Portraits de phase en dimension 2

Applications conservatives

Nous étudions à présent un exemple important qui intervient en Mécanique et en Physique.

Soit une particule de masse 1 se déplaçant en dimension 1 (q position, p impulsion) dans un champ de potentiel $V(q)$:

$$\ddot{q} = -\nabla V(q)$$

ou sous forme d'E.D.O d'ordre 1

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\nabla V(q) \end{cases}$$

L'énergie mécanique du système $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ est conservée au cours du mouvement : $\frac{d}{dt}H(q(t), p(t)) = 0$.

Portraits de phase en dimension 2

Applications conservatives

Le portrait de phase est donc facile à dessiner dans le plan (q, p) : les trajectoires sont situées sur les lignes de niveau de H , $H(q, p) = cste = E$.

Portraits de phase en dimension 2

Applications conservatives

Le portrait de phase est donc facile à dessiner dans le plan (q, p) : les trajectoires sont situées sur les lignes de niveau de H , $H(q, p) = cste = E$. Ces lignes de niveau sont des objets de dimension 1, et en général sont des courbes fermées (homéomorphes au cercle \mathbb{S}^1) ou ouvertes (des images bijectives continues de \mathbb{R}) et des points (des points d'équilibre où le champ de vecteurs s'annule).

Portraits de phase en dimension 2

Applications conservatives

Remarque :

Portraits de phase en dimension 2

Applications conservatives

Remarque :

De façon générale, si $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on définit un système hamiltonien ($i = 1, \dots, n$)

$$\begin{cases} \dot{q}_i = +\frac{\partial}{\partial p_i} H(q, p) \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} H(q, p) \end{cases}$$

Portraits de phase en dimension 2

Applications conservatives

Remarque :

De façon générale, si $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on définit un système hamiltonien ($i = 1, \dots, n$)

$$\begin{cases} \dot{q}_i = +\frac{\partial}{\partial p_i} H(q, p) \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} H(q, p) \end{cases}$$

Un calcul facile montre que si $(q(t), p(t))$ est solution du système précédent alors $\frac{d}{dt} H(q(t), p(t)) = 0$. H s'appelle le **hamiltonien du système**.

Portraits de phase en dimension 2

Applications conservatives

Remarque :

De façon générale, si $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on définit un système hamiltonien ($i = 1, \dots, n$)

$$\begin{cases} \dot{q}_i = +\frac{\partial}{\partial p_i} H(q, p) \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} H(q, p) \end{cases}$$

Un calcul facile montre que si $(q(t), p(t))$ est solution du système précédent alors $\frac{d}{dt} H(q(t), p(t)) = 0$. H s'appelle le **hamiltonien du système**.

En dimension plus grand, cela ne permet pas de déterminer les trajectoires simplement, sauf si l'on dispose de suffisamment **d'intégrales premières** (quantités conservées au cours du mouvement).

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

Considérons à présent une **perturbation** (par exemple en rajoutant un terme de frottement) du système (*) :

$$\ddot{q} = -\nabla V(q) + \epsilon f(q, \dot{q})$$

ou sous forme d'E.D.O d'ordre 1

$$\begin{cases} \dot{q} = p + \epsilon f_1(q, p) \\ \dot{p} = -\nabla V(q) + \epsilon f_2(q, p) \end{cases}$$

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

Considérons à présent une **perturbation** (par exemple en rajoutant un terme de frottement) du système (*) :

$$\ddot{q} = -\nabla V(q) + \epsilon f(q, \dot{q})$$

ou sous forme d'E.D.O d'ordre 1

$$\begin{cases} \dot{q} = p + \epsilon f_1(q, p) \\ \dot{p} = -\nabla V(q) + \epsilon f_2(q, p) \end{cases}$$

Nous considérons dans l'espace des phases \mathbb{R}^2

$$\dot{x} = X_\epsilon(x) = X(x) + \epsilon F(x)$$

$$\text{où } X(x) := X(q, p) = \begin{pmatrix} p \\ -\nabla V(q) \end{pmatrix}.$$

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

Un exemple important (équation de Liénard) est quand $f_1(q, p) = 0$ et $f_2(q, p) = f(p)$. Quand $f(p) = p^3 - p$ on parle de l'équation de Van der Pol qui modélise des système RLC avec une résistance non-linéaire.

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

Considérons Σ un segment (dimension 1) transverse au flot de X (donc telle qu'en tout point d'intersection de Σ avec une orbite $\phi^t(x)$ on ait $\Sigma \oplus X(\phi^t(x)) = \mathbb{R}^2$.)

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

Considérons Σ un segment (dimension 1) transverse au flot de X (donc telle qu'en tout point d'intersection de Σ avec une orbite $\phi^t(x)$ on ait $\Sigma \oplus X(\phi^t(x)) = \mathbb{R}^2$.)

Si P_0 l'application de premier retour de Poincaré ainsi définie on a alors $P_0(x) = x$ pour tout $x \in \Sigma$.

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

Considérons Σ un segment (dimension 1) transverse au flot de X (donc telle qu'en tout point d'intersection de Σ avec une orbite $\phi^t(x)$ on ait $\Sigma \oplus X(\phi^t(x)) = \mathbb{R}^2$.)

Si P_0 l'application de premier retour de Poincaré ainsi définie on a alors $P_0(x) = x$ pour tout $x \in \Sigma$.

Si ϵ est assez petit, Σ est aussi transverse au flot de X_ϵ . On note P_ϵ l'application de premier retour associée.

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

Considérons Σ un segment (dimension 1) transverse au flot de X (donc telle qu'en tout point d'intersection de Σ avec une orbite $\phi^t(x)$ on ait $\Sigma \oplus X(\phi^t(x)) = \mathbb{R}^2$.)

Si P_0 l'application de premier retour de Poincaré ainsi définie on a alors $P_0(x) = x$ pour tout $x \in \Sigma$.

Si ϵ est assez petit, Σ est aussi transverse au flot de X_ϵ . On note P_ϵ l'application de premier retour associée.

Calculons P_ϵ (de façon approchée) en estimant ϕ_ϵ^t .

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

D'après le théorème de dépendance différentiable par rapport au paramètre

$$\phi_\epsilon^t(x) = \phi_0^t(x) + \epsilon B(x, t) + O(\epsilon^2)$$

où $B(x, t)$ est obtenue en résolvant l'équation linéarisée le long du flot de $X_0(\cdot)$

$$v'(t) = DX(\phi_0^t(x)) \cdot v(t) + F(\phi_0^t(x)), \quad v(0) = 0;$$

ainsi, $B(x, t) = \int_0^t R_x(t, s)F(s)ds$ où $R_x(t, 0)$ est la résolvante de

$$v'(t) = DX(\phi_0^t(x)) \cdot v(t).$$

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

En utilisant $\tau_\epsilon(x) = \tau_0(x) + \epsilon\tau'_0(x) + O(\epsilon^2)$ on a

$$\phi_\epsilon^{\tau(x)}(x) = x + \epsilon\tau'_0(x)X_0(x) + \epsilon B(x, \tau_0(x)) + O(\epsilon^2).$$

En projetant sur Σ parallèlement à $X_0(x)$ (ou $X_0(x) + \epsilon F(x)$, cela n'a pas d'importance)

$$P_\epsilon(x) = x + \epsilon b(x) + O(\epsilon^2),$$

où $b(x) = \text{proj}_\Sigma(\int_0^{\tau_0(x)} R_x(\tau_0(x), s)F(s)ds)$.

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

Le champ de vecteur $X_\epsilon(\cdot)$ admet des orbites périodiques $\phi_\epsilon^t(y)$ ssi il existe $y \in \Sigma$ tel que $P_\epsilon(y) = y$ ou encore $b(y) + O(\epsilon)(y) = 0$.

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

Le champ de vecteur $X_\epsilon(\cdot)$ admet des orbites périodiques $\phi_\epsilon^t(y)$ ssi il existe $y \in \Sigma$ tel que $P_\epsilon(y) = y$ ou encore $b(y) + O(\epsilon)(y) = 0$.

Si b admet un nombre fini de zéros y_1, \dots, y_m tels que $b'(y_i) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous enseigne que pour ϵ suffisamment petit, il existe m zéros de $b(y) + O(\epsilon)(y)$, $y_1(\epsilon), \dots, y_m(\epsilon) \in \Sigma$.

Portraits de phase

Perturbation d'une application conservative

Le champ de vecteur $X_\epsilon(\cdot)$ admet des orbites périodiques $\phi_\epsilon^t(y)$ ssi il existe $y \in \Sigma$ tel que $P_\epsilon(y) = y$ ou encore $b(y) + O(\epsilon)(y) = 0$.

Si b admet un nombre fini de zéros y_1, \dots, y_m tels que $b'(y_i) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous enseigne que pour ϵ suffisamment petit, il existe m zéros de $b(y) + O(\epsilon)(y)$, $y_1(\epsilon), \dots, y_m(\epsilon) \in \Sigma$.

Comme $DP_\epsilon(y_i(\epsilon)) = 1 + \epsilon b'(y_i(\epsilon)) + O(\epsilon^2)$ est alors différent de ± 1 , on voit que les orbites périodiques $\mathcal{O}(y_i(\epsilon))$ seront asymptotiquement stables ou instables.

Portraits de phase

Le théorème de Poincaré-Bendixon (complément)

La situation précédente est en fait typique.

Portraits de phase

Le théorème de Poincaré-Bendixon (complément)

La situation précédente est en fait typique.

On appelle ensemble ω -limite de x , l'ensemble $\omega(x)$ des points d'accumulation de $(\phi^t(x))_{t>0}$ (ensemble de toutes les limites possibles de sous-suites $\phi^{t_k}(x)$). On pose $\omega(X) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^2} \omega(x)$ (ensemble ω -limite de la dynamique).

Portraits de phase

Le théorème de Poincaré-Bendixon (complément)

La situation précédente est en fait typique.

On appelle ensemble ω -limite de x , l'ensemble $\omega(x)$ des points d'accumulation de $(\phi^t(x))_{t>0}$ (ensemble de toutes les limites possibles de sous-suites $\phi^{t_k}(x)$). On pose $\omega(X) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^2} \omega(x)$ (ensemble ω -limite de la dynamique).

C'est un fermé, positivement invariant par le flot, connexe s'il est borné.

Portraits de phase

Le théorème de Poincaré-Bendixon (complément)

Théorème (Poincaré-Bendixon)

Supposons que X n'ait qu'un **nombre fini de singularités** et que l'orbite positive de x , $\mathcal{O}^+(x) := \{\phi^t(x) : t \geq 0\}$ soit **bornée**.

- (a) Si $\omega(x)$ ne contient que des points **réguliers** alors $\omega(x)$ est une **orbite périodique fermée**.
- (b) Si $\omega(x)$ contient des points **réguliers et singuliers**, alors $\omega(x)$ est l'union de ses points singuliers et d'orbites qui chacune tendent en $t \rightarrow \pm\infty$ vers ces points singuliers. (On parle de **cycle limite**.)
- (c) Si $\omega(x)$ ne contient **pas de points réguliers** alors $\omega(x)$ est **réduit à un point singulier**.

Portraits de phase

Le théorème de Poincaré-Bendixon (complément)

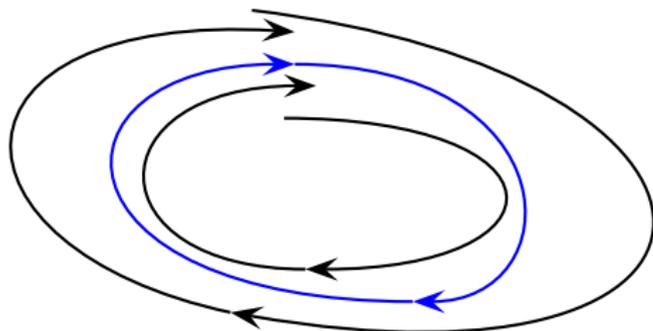


FIGURE: Orbite périodique attractive

Portraits de phase

Le théorème de Poincaré-Bendixon (complément)

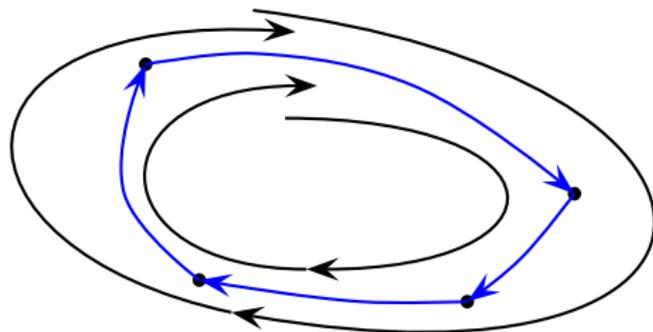


FIGURE: Cycle limite