M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

23-24 /11/2021

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire Plan du cours 8

Nous passons à l'étude plus géométrique des équations diifférentielles.

Nous passons à l'étude plus géométrique des équations diifférentielles.
Nous supposerons que :

Nous passons à l'étude plus géométrique des équations diifférentielles.
Nous supposerons que :

- $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geqslant 1)$: Cauchy-Lipschitz + théorème de dépendance différentiable.

Nous passons à l'étude plus géométrique des équations diifférentielles.
Nous supposerons que :

- $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geqslant 1)$: Cauchy-Lipschitz + théorème de dépendance différentiable.
- X est complet : $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \tag{1}$$

admet une sol. (donc unique) définie $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nous passons à l'étude plus géométrique des équations diifférentielles. Nous supposerons que :

- $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geqslant 1)$: Cauchy-Lipschitz + théorème de dépendance différentiable.
- X est complet : $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \tag{1}$$

admet une sol. (donc unique) définie $\forall t \in \mathbb{R}$.

On dit : X champ de vecteurs dépendant du temps, mais on préfère réserver la terminologie champ de vecteurs au cas où X ne dépend pas de t.

Outil fondamental : théorème de dépendance différentiable (plus particulièrement par rapport aux conditions initiales) $+$ linéarisation.

Outil fondamental : théorème de dépendance différentiable (plus particulièrement par rapport aux conditions initiales) + linéarisation.

Théorème (Théorème de dépendance différentiable et linéarisation)

- $\exists\ \mathcal{W} \in Vois_{(\lambda_0,v_0)}$, $\forall(\lambda, v) \in \mathcal{W}$, $\exists! y_{\lambda,v}(\cdot)$ *sol. de* $(P.C.)_{\lambda,v}$ *sur* $[t_0, t_1]$
- $(\lambda, v) \mapsto y_{\lambda,v}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ *classe* C^k.
- *Dérivée* $(D_{v,\lambda}y)(v_0, \lambda_0) \cdot (\Delta v, \Delta\lambda) = \Delta y(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ *sol. de l'EDO affine*

$$\iff \begin{cases} (\Delta y)'(t) & = D_y X(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta y(t) + D_\lambda X(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta\lambda \\ \Delta y(t_0) & = \Delta v. \end{cases}$$

- Théorème de dépendance différentiable par rapport à le condition initiale $\Longrightarrow \phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto$ la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est C^k.

- Théorème de dépendance différentiable par rapport à le condition initiale $\Longrightarrow \phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto$ la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est C^k.

$$\forall\ t_0, t \in \mathbb{R},\ \phi^{t,t_0}(x(t_0)) = x(t) \Longleftrightarrow\ x(\cdot) \text{ solution de } (1)$$

- Théorème de dépendance différentiable par rapport à le condition initiale $\Longrightarrow \phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto$ la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est C^k.

$$\forall\ t_0, t \in \mathbb{R},\ \phi^{t,t_0}(x(t_0)) = x(t) \iff x(\cdot) \text{ solution de } (1)$$

- D'après le théorème d'existence et d'unicité on a pour tous t_0, t_1, t_2

$$\phi^{t_2,t_0} = \phi^{t_2,t_1} \circ \phi^{t_1,t_0} \qquad \text{(Chasles)}$$

- Théorème de dépendance différentiable par rapport à le condition initiale $\Longrightarrow \phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto$ la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est C^k.

$$\forall\ t_0, t \in \mathbb{R},\ \phi^{t,t_0}(x(t_0)) = x(t) \Longleftrightarrow\ x(\cdot) \text{ solution de (1)}$$

- D'après le théorème d'existence et d'unicité on a pour tous t_0, t_1, t_2

$$\phi^{t_2,t_0} = \phi^{t_2,t_1} \circ \phi^{t_1,t_0} \qquad \text{(Chasles)}$$

- $\phi^{t,t_0}(\cdot)$ est un C^k-difféomorphisme : l'application ϕ^{t,t_0} est inversible, d'inverse $\phi^{t_0,t}$ qui est aussi de classe C^k.

- Théorème de dépendance différentiable par rapport à le condition initiale $\Longrightarrow \phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto$ la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est C^k.

$$\forall\ t_0, t \in \mathbb{R},\ \phi^{t,t_0}(x(t_0)) = x(t) \Longleftrightarrow\ x(\cdot) \text{ solution de (1)}$$

- D'après le théorème d'existence et d'unicité on a pour tous t_0, t_1, t_2

$$\phi^{t_2,t_0} = \phi^{t_2,t_1} \circ \phi^{t_1,t_0} \qquad \text{(Chasles)}$$

- $\phi^{t,t_0}(\cdot)$ est un C^k-difféomorphisme : l'application ϕ^{t,t_0} est inversible, d'inverse $\phi^{t_0,t}$ qui est aussi de classe C^k.
- On dit que ϕ^{t,t_0} est le flot de X.

Le flot est l'analogue non-linéaire de la résolvante

Le flot est l'analogue non-linéaire de la résolvante
mêmes propriétés, mêmes preuves :

Le flot est l'analogue non-linéaire de la résolvante
mêmes propriétés, mêmes preuves :

- Si X ne dépend pas de t on a $\phi^{t,t_0} = \phi^{t-t_0,0}$; on notera ϕ^t à la place de $\phi^{t,0}$. On a alors (analogue de l'exponentielle)

$$\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}.$$

Le flot est l'analogue non-linéaire de la résolvante
mêmes propriétés, mêmes preuves :

- Si X ne dépend pas de t on a $\phi^{t,t_0} = \phi^{t-t_0,0}$; on notera ϕ^t à la place de $\phi^{t,0}$. On a alors (analogue de l'exponentielle)

$$\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}.$$

- Si X dépend de façon T-périodique de t on a (comme pour la résolvante)

$$\phi^{t+T,t_0+T} = \phi^{t,t_0}$$

et aussi

$$\phi^{t+T,t} = \phi^t \circ \phi^{T,0} \circ \phi^{-t}.$$

- Quand $X(t,x) = A(t)x$ est linéaire on a $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x$.

- Quand $X(t,x) = A(t)x$ est linéaire on a $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x$.
- Si $X(t,x) = A(t)x + b(t)$ est affine, variation de la constante $\Longrightarrow$ $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds$.

- Quand $X(t,x) = A(t)x$ est linéaire on a $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x$.
- Si $X(t,x) = A(t)x + b(t)$ est affine, variation de la constante $\Longrightarrow$ $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds$.
- Le flot permet de caractériser facilement les orbites périodiques : $x(t)$ est une solution T-périodique ssi $\phi^T(x) = x$.

- Quand $X(t,x) = A(t)x$ est linéaire on a $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x$.
- Si $X(t,x) = A(t)x + b(t)$ est affine, variation de la constante $\Longrightarrow$ $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds$.
- Le flot permet de caractériser facilement les orbites périodiques : $x(t)$ est une solution T-périodique ssi $\phi^T(x) = x$.
- Point singulier : si $X(x_0) = 0$ alors, $x(\cdot) \equiv x_0$ est solution et $\phi^t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est un point singulier (ou point d'équilibre) de X (si $X(x_0) \neq 0$ on dit que x_0 est régulier).

- Quand $X(t,x) = A(t)x$ est linéaire on a $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x$.
- Si $X(t,x) = A(t)x + b(t)$ est affine, variation de la constante $\Longrightarrow$ $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds$.
- Le flot permet de caractériser facilement les orbites périodiques : $x(t)$ est une solution T-périodique ssi $\phi^T(x) = x$.
- Point singulier : si $X(x_0) = 0$ alors, $x(\cdot) \equiv x_0$ est solution et $\phi^t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est un point singulier (ou point d'équilibre) de X (si $X(x_0) \neq 0$ on dit que x_0 est régulier).
- Orbite (resp. orbite positive, après le temps t) de $x_0 \in \Omega$ l'ensemble $\mathcal{O}(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ (resp. $\mathcal{O}^+(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \geqslant 0\}$, $\mathcal{O}^{\geqslant t}(x_0) = \{\phi^s(x_0) : s \geqslant t\}$)

Théorème de dépendance différentiable par rapport à la condition initiale $+$ linéarisation $\Longrightarrow$

Théorème de dépendance différentiable par rapport à la condition initiale
$+$ linéarisation $\Longrightarrow$

Proposition

Si $R(t, t_0)$ est la résolvante de l'équation linéarisée le long de $x_0(t)$:

$$v'(t) = DX(t, x_0(t)) \cdot v(t)$$

on a

$$D\phi^{t,t_0}(x_0) = R(t, t_0).$$

Notion de flot : E.D.O. $\leftrightarrow$ difféomorphisme(s) : plus géométrique.

:

Notion de flot : E.D.O. $\leftrightarrow$ difféomorphisme(s) : plus géométrique.
Dynamique d'un difféo = itérations de compositions :

Notion de flot : E.D.O. $\leftrightarrow$ difféomorphisme(s) : plus géométrique.
Dynamique d'un difféo = itérations de compositions : pas forcément plus simple que celle d'un champ de vecteurs.

Notion de flot : E.D.O. $\leftrightarrow$ difféomorphisme(s) : plus géométrique.
Dynamique d'un difféo = itérations de compositions : pas forcément plus simple que celle d'un champ de vecteurs.
Application de premier retour Poincaré :

Notion de flot : E.D.O. $\leftrightarrow$ difféomorphisme(s) : plus géométrique.
Dynamique d'un difféo = itérations de compositions : pas forcément plus simple que celle d'un champ de vecteurs.
Application de premier retour Poincaré : un autre exemple EDO $\leftrightarrow$ difféo mais avec diminution de la dim. de l'espace des phases.

Sommaire Plan du cours 8

- $X(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ($\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$) un champ de vecteurs

- $X(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ($\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$

- $X(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ($\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$
- Σ ouvert d'un hyperplan (dimension $n-1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$:

- $X(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ($\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$
- Σ ouvert d'un hyperplan (dimension $n-1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$:
- on dit que la section Σ ($x_0 \in \Sigma$) est transverse à l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ de x_0 en x_0.

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes

Application de Poincaré

- $X(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ($\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$
- Σ ouvert d'un hyperplan (dimension $n-1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$:
- on dit que la section Σ ($x_0 \in \Sigma$) est transverse à l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ de x_0 en x_0.

Temps de premier retour

- $X(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ($\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$
- Σ ouvert d'un hyperplan (dimension $n-1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$:
- on dit que la section Σ ($x_0 \in \Sigma$) est transverse à l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ de x_0 en x_0.

Temps de premier retour de x_0 sur Σ (si $\exists$) :

$$\tau_0 = \min\{t > 0 : \phi^t(x_0) \in \Sigma\}$$

(transversalité $\Longrightarrow \tau_0 > 0$, l'inf est un min).

- $X(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ($\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$) un champ de vecteurs
- $x_0 \in \Omega$
- Σ ouvert d'un hyperplan (dimension $n-1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$:
- on dit que la section Σ ($x_0 \in \Sigma$) est transverse à l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ de x_0 en x_0.

Temps de premier retour de x_0 sur Σ (si $\exists$) :

$$\tau_0 = \min\{t > 0 : \phi^t(x_0) \in \Sigma\}$$

(transversalité $\Longrightarrow \tau_0 > 0$, l'inf est un min).
On dit alors que

$$\phi^{\tau_0}(x_0) \text{ est le premier retour de } x_0 \text{ sur } \Sigma.$$

Théorème

Si $\tau_0(x_0)$ *existe :*

- $\exists W = U \cap \Sigma$ *vois. ouvert de* x_0 *dans* Σ *(*U *ouvert de* Ω *contenant* x_0*) et une appl.* $\tau : W \to \mathbb{R}$ *de classe* C^k *tq* $\forall u \in W$, $\tau(u) =$ *temps de premier retour de* u *sur* Σ*.*

Théorème

Si $\tau_0(x_0)$ *existe :*

- $\exists W = U \cap \Sigma$ *vois. ouvert de* x_0 *dans* Σ *(*U *ouvert de* Ω *contenant* x_0*) et une appl.* $\tau : W \to \mathbb{R}$ *de classe* C^k *tq* $\forall u \in W, \tau(u) =$ *temps de premier retour de* u *sur* Σ.
- *L'appl.* $P : W \to \Sigma : P(u) = \phi^{\tau(u)}(u)$ *classe* C^k $=$ *l'application de premier retour de Poincaré.* P *est un difféomorphisme de* W *sur son image.*

Théorème

Si $\tau_0(x_0)$ *existe :*

- $\exists W = U \cap \Sigma$ *vois. ouvert de* x_0 *dans* Σ *(*U *ouvert de* Ω *contenant* x_0*) et une appl.* $\tau : W \to \mathbb{R}$ *de classe* C^k *tq* $\forall u \in W$, $\tau(u) =$ *temps de premier retour de* u *sur* Σ*.*
- *L'appl.* $P : W \to \Sigma : P(u) = \phi^{\tau(u)}(u)$ *classe* C^k *= l'application de premier retour de Poincaré.* P *est un difféomorphisme de* W *sur son image.*
- *Si* $X_\epsilon(\cdot)$ *dépend* C^k *d'un param.* $\epsilon \Longrightarrow$ *si* ϵ *petit,* W *indep. de* ϵ *et* τ_ϵ*,* P_ϵ *pour* X_ϵ *et* Σ *dépendent* C^k *de* ϵ*.*

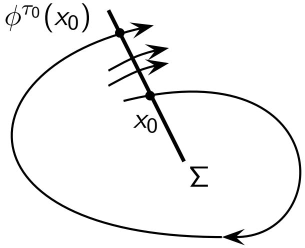

FIGURE: L'application de Poincaré : $P(x_0) = \phi^{\tau_0(x_0)}$

Démonstration :

Démonstration : (i)

Démonstration : (i)

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,
- p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,
- p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ
- $\tilde{p}$ la projection sur Σ parallèlement à $X(x_1)$.

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,
- p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ
- $\tilde{p}$ la projection sur Σ parallèlement à $X(x_1)$.
- $\psi : \mathbb{R} \times \Sigma \to \mathbb{R}$ l'application à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage de $(\tau_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ par $\psi(t, u) = p_1(\phi^t(u))$.

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,
- p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ
- $\tilde{p}$ la projection sur Σ parallèlement à $X(x_1)$.
- $\psi : \mathbb{R} \times \Sigma \to \mathbb{R}$ l'application à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage de $(\tau_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ par $\psi(t, u) = p_1(\phi^t(u))$.
- $$\psi(t, u) = 0 \iff \phi^t(u) \in \Sigma$$

Démonstration : (i)

- $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$,
- p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ
- $\tilde{p}$ la projection sur Σ parallèlement à $X(x_1)$.
- $\psi : \mathbb{R} \times \Sigma \to \mathbb{R}$ l'application à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage de $(\tau_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ par $\psi(t, u) = p_1(\phi^t(u))$.
- $$\psi(t, u) = 0 \iff \phi^t(u) \in \Sigma$$

On applique théorème des fonctions implicites

$$\psi(t, u) = 0 \iff t = \tau(u).$$

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

- $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$ $(t_0 = \tau_0)$.

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

- $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$ $(t_0 = \tau_0)$.
- S'il existe un autre temps $t_1(x) < \tau(x)$ tel que $\phi^{t_1(x)}(x) \in \Sigma$ on a donc $t_1(x) < \tau_0 - \delta$.

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

- $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$ $(t_0 = \tau_0)$.
- S'il existe un autre temps $t_1(x) < \tau(x)$ tel que $\phi^{t_1(x)}(x) \in \Sigma$ on a donc $t_1(x) < \tau_0 - \delta$.
- S'il existait une infinité de tels $x \in \Sigma$ on aurait une suite $x_n \to x_0$, $x_n \in \Sigma$ et $0 < t_n < t_0 - \delta$ tels que $\phi^{t_n}(x_n) \in \Sigma$.

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

- $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$ ($t_0 = \tau_0$).
- S'il existe un autre temps $t_1(x) < \tau(x)$ tel que $\phi^{t_1(x)}(x) \in \Sigma$ on a donc $t_1(x) < \tau_0 - \delta$.
- S'il existait une infinité de tels $x \in \Sigma$ on aurait une suite $x_n \to x_0$, $x_n \in \Sigma$ et $0 < t_n < t_0 - \delta$ tels que $\phi^{t_n}(x_n) \in \Sigma$.
- Quitte à extraire une sous-suite, cela donnerait un $t_* \leqslant t_0 - \delta$ tel que $\phi^{t_*}(x_0) \in \Sigma$.

(ii) τ est bien le temps de premier retour.

- $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$ ($t_0 = \tau_0$).
- S'il existe un autre temps $t_1(x) < \tau(x)$ tel que $\phi^{t_1(x)}(x) \in \Sigma$ on a donc $t_1(x) < \tau_0 - \delta$.
- S'il existait une infinité de tels $x \in \Sigma$ on aurait une suite $x_n \to x_0$, $x_n \in \Sigma$ et $0 < t_n < t_0 - \delta$ tels que $\phi^{t_n}(x_n) \in \Sigma$.
- Quitte à extraire une sous-suite, cela donnerait un $t_* \leqslant t_0 - \delta$ tel que $\phi^{t_*}(x_0) \in \Sigma$.
- Cela contredit la minimalité de τ_0.

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \to \Sigma$: $P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \to \Sigma$: $P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$DP(x_0) = \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma}$$

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \to \Sigma$: $P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$\begin{aligned} DP(x_0) &= \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma} \\ &= \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma} \quad (\text{car } \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)) = 0). \end{aligned}$$

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \to \Sigma$: $P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$\begin{aligned} DP(x_0) &= \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma} \\ &= \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma} \quad (\text{car } \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)) = 0). \end{aligned}$$

L'application $DP(u_0) : \Sigma \to \Sigma$ est injective

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \to \Sigma$: $P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$\begin{aligned} DP(x_0) &= \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma} \\ &= \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma} \quad (\text{car } \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)) = 0). \end{aligned}$$

L'application $DP(u_0) : \Sigma \to \Sigma$ est injective
Le théorème d'inversion locale s'applique.

(iii) Différentielle de $P : \Sigma \to \Sigma$: $P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$\begin{aligned} DP(x_0) &= \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma} \\ &= \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma} \quad (\text{car } \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)) = 0). \end{aligned}$$

L'application $DP(u_0) : \Sigma \to \Sigma$ est injective
Le théorème d'inversion locale s'applique.
La partie sur la dépendance C^k en ϵ ne pose pas de problème. □

Des relations
$DP(x_0) = \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma}, \qquad D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot X(x_0) = X(\phi^{\tau_0}(x_0))$
on tire davantage d'information sur P

Des relations
$DP(x_0) = \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma}, \qquad D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot X(x_0) = X(\phi^{\tau_0}(x_0))$
on tire davantage d'information sur P

Théorème

Si $\phi^t_X(x_0)$ est τ_0-périodique, la différentielle $DP(x_0)$ dans une base dont le premier vecteur est $X(x_0)$ et dont les autres sont dans Σ est reliée à celle de $D\phi^{\tau_0}_X(x_0)$ par

$$D\phi^{\tau_0}_X(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & DP(x_0) \end{pmatrix}.$$

Des relations

$DP(x_0) = \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma}, \qquad D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot X(x_0) = X(\phi^{\tau_0}(x_0))$

on tire davantage d'information sur P

Théorème

Si $\phi_X^t(x_0)$ est τ_0-périodique, la différentielle $DP(x_0)$ dans une base dont le premier vecteur est $X(x_0)$ et dont les autres sont dans Σ est reliée à celle de $D\phi_X^{\tau_0}(x_0)$ par

$$D\phi_X^{\tau_0}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & DP(x_0) \end{pmatrix}.$$

Remarque :

Des relations
$DP(x_0) = \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma}, \qquad D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot X(x_0) = X(\phi^{\tau_0}(x_0))$
on tire davantage d'information sur P

Théorème

Si $\phi_X^t(x_0)$ est τ_0-périodique, la différentielle $DP(x_0)$ dans une base dont le premier vecteur est $X(x_0)$ et dont les autres sont dans Σ est reliée à celle de $D\phi_X^{\tau_0}(x_0)$ par

$$D\phi_X^{\tau_0}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & DP(x_0) \end{pmatrix}.$$

Remarque : cf. $D\phi_X^{\tau_0}(x_0) = R(\tau_0, 0)$ où R = résolvante du système linéarisé $v'(t) = DX(\phi^t(x_0)) \cdot v(t)$ (le long de l'orbite de x_0)