M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

28/10 - 10 /11/2021

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire Plan du cours 3

1. Temps de vie des solutions
   - Intervalle maximal
   - Estimation du temps de vie : critères géométrique et analytique
2. O.D.E. non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations

Problème : $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ cont. loc. lip.(en y), $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $y(\cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases} \qquad (*)$$

sur un intervalle I,

Problème : $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ cont. loc. lip.(en y), $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $y(\cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases} \qquad (*)$$

sur un intervalle I,
Est-il possible de la prolonger en une solution définie sur un intervalle plus grand ?

Problème : $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ cont. loc. lip.(en y), $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $y(\cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases} \qquad (*)$$

sur un intervalle I,
Est-il possible de la prolonger en une solution définie sur un intervalle plus grand ?
Notation (y, I) : sol. de $y' = f(t, y)$ sur l'intervalle ouvert I.

Proposition (Recollement des solutions)

(y_1, I_1), (y_2, I_2) sol. de $(*)$.

$$\exists t_0 \in I_1 \cap I_2,\ y_1(t_0) = y_2(t_0) \Longrightarrow \forall t \in I_1 \cap I_2,\ y_1(t) = y_2(t).$$

La fonction $y : I_1 \cup I_2 \to E$: $y|I_1 = y_1$, $y|I_2 = y_2$ est C^1 et solution de $(*)$ sur $I_1 \cup I_2$. On dit que $(y, I_1 \cup I_2)$ recolle (y_1, I_1) et (y_2, I_2).

Définition

I_1, I_2 intervalles ouverts tq $I_1 \subset I_2$, $I_1 \neq I_2$, et y_1, y_2 deux sol. de $(*)$ resp. sur I_1 et I_2. On dit que (y_2, I_2) prolonge (y_1, I_1) si $y_2|I_1 = y_1|I_1$. Une sol. (y, I) de $(*)$ est maximale si on ne peut pas la prolonger.

Définition

I_1, I_2 intervalles ouverts tq $I_1 \subset I_2$, $I_1 \neq I_2$, et y_1, y_2 deux sol. de $(*)$ resp. sur I_1 et I_2. On dit que (y_2, I_2) prolonge (y_1, I_1) si $y_2|I_1 = y_1|I_1$. Une sol. (y, I) de $(*)$ est maximale si on ne peut pas la prolonger.

On peut alors énoncer,

Proposition

Toute sol. (y, I) de $(*)$ peut être prolongée en une unique solution maximale.

Définition

I_1, I_2 intervalles ouverts tq $I_1 \subset I_2$, $I_1 \neq I_2$, et y_1, y_2 deux sol. de $(*)$ resp. sur I_1 et I_2. On dit que (y_2, I_2) prolonge (y_1, I_1) si $y_2|I_1 = y_1|I_1$. Une sol. (y, I) de $(*)$ est maximale si on ne peut pas la prolonger.

On peut alors énoncer,

Proposition

Toute sol. (y, I) de $(*)$ peut être prolongée en une unique solution maximale.

Démonstration : L'intervalle maximal est l'union de tous les intervalles I contenant y_0 pour lesquels (y, I) est solution de $(*)$. $\square$

Remarque. Si $\Omega = I \times E$ et si $\forall (t_0, v_0) \in \Omega$ $\exists !$ sol. y_{t_0, v_0} maximale sur I tout entier, on dit que l'équation est complète.

Exemple d'explosion en temps fini. $\dot{x} = x^2$, $x(t_0) = x_0$;

Exemple d'explosion en temps fini. $\dot{x} = x^2$, $x(t_0) = x_0$;
Solutions :

$$\frac{1}{t_0 + \frac{1}{x_0} - t}$$

Si $x_0 = 0$: solution nulle $x_0 \equiv 0$ définie sur $\mathbb{R}$.
Si $x_0 \neq 0$; définies uniquement pour $t < t_0 + \frac{1}{x_0}$ ou $t > t_0 + \frac{1}{x_0}$.
Si $x_0 > 0$: solution maximale $y_{t_0,x_0} = \left(\frac{1}{t_0+\frac{1}{x_0}-t},]-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[\right)$,
Si $x_0 < 0$: solution maximale $y_{t_0,x_0} = \left(\frac{1}{t_0+\frac{1}{x_0}-t},]t_0 + \frac{1}{x_0}, \infty[\right)$.
Les solutions maximales sont donc

$$(0, \mathbb{R}), \qquad \left(\frac{1}{c-t},]-\infty, c[\right), \qquad \left(\frac{1}{c-t},]c, \infty[\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

Exemple de solutions maximales. $\dot{x} = 1 + x^2$;

Exemple de solutions maximales. $\dot{x} = 1 + x^2$;
Les solutions maximales sont :

$$\left(\tan(\cdot - c),]c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}[\right), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Considérons donc (y, I) une solution maximale de $(*)$ et supposons $I \neq \mathbb{R}$ de façon que I ait au moins une extrémité finie ; on supposera par exemple $I = (b, a)$. Que se passe-t-il en a, b ?.

Considérons donc (y, I) une solution maximale de $(*)$ et supposons $I \neq \mathbb{R}$ de façon que I ait au moins une extrémité finie ; on supposera par exemple $I = (b, a)$. Que se passe-t-il en a, b ?.

Théorème (Propriété de sortie de tout compact)

(y, I) une sol. maximale, $I \neq \mathbb{R}$, $a \in \partial I \Longrightarrow \forall K \subset \Omega$ compact $\exists t_0 \in I$ t.q. $\forall t \in]t_0, a[$, $y(t) \notin K$.

Considérons donc (y, I) une solution maximale de $(*)$ et supposons $I \neq \mathbb{R}$ de façon que I ait au moins une extrémité finie ; on supposera par exemple $I = (b, a)$. Que se passe-t-il en a, b ?.

Théorème (Propriété de sortie de tout compact)

(y, I) une sol. maximale, $I \neq \mathbb{R}$, $a \in \partial I \Longrightarrow \forall K \subset \Omega$ compact $\exists t_0 \in I$ t.q. $\forall t \in]t_0, a[$, $y(t) \notin K$.

Certains auteurs font référence à ce théorème comme le **théorème des bouts.**

Considérons donc (y, I) une solution maximale de $(*)$ et supposons $I \neq \mathbb{R}$ de façon que I ait au moins une extrémité finie ; on supposera par exemple $I = (b, a)$. Que se passe-t-il en a, b ?.

Théorème (Propriété de sortie de tout compact)

(y, I) une sol. maximale, $I \neq \mathbb{R}$, $a \in \partial I \Longrightarrow \forall K \subset \Omega$ compact $\exists t_0 \in I$ t.q. $\forall t \in]t_0, a[$, $y(t) \notin K$.

Certains auteurs font référence à ce théorème comme le **théorème des bouts.**

Exemple : si $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $I = (b, a)$ $(-\infty < b < a < \infty)$ on choisit $K = [b-1, a+1] \times [-M, M]$

$$\exists t_0 \in]a, b[, \quad \forall t \in]t_0, a[, \quad |x(t)| > M.$$

On dispose de deux types de critères :

On dispose de deux types de critères :

- Critère géométique : Fonctions de Lyapunov

On dispose de deux types de critères :

- Critère géométique : Fonctions de Lyapunov
- Critère analytique : Lemme de Gronwall

Critère géométique : Fonctions de Lyapunov

Critère géométique : Fonctions de Lyapunov

Théorème

Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1, $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \leqslant 0\}$. *Supposons que* $f(t,x)$ *définie sur* $\Omega \supset \mathbb{R} \times F$ *soit telle que*

- *(a)* $D\varphi(x) \cdot f(t,x) < 0$ *pour tout* $x \in \varphi^{-1}(0)$, $t \in \mathbb{R}$
- *ou (b)* $D\varphi(x) \cdot f(t,x) \leqslant 0$ *pour tout* $x \in \varphi^{-1}(]-\infty, 0])$, $t \in \mathbb{R}$.

Si pour $y_0 \in F$, $(y(\cdot), I)$ *est la solution maximale de* $\dot{y} = f(t,y)$ *telle que* $y(t_0) = y_0$, *alors pour tout* $t \in [t_0, \infty[\cap I$, $y(t) \in F$.

Critère géométique : Fonctions de Lyapunov

Théorème

Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1, $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \leqslant 0\}$. *Supposons que* $f(t,x)$ *définie sur* $\Omega \supset \mathbb{R} \times F$ *soit telle que*

- *(a)* $D\varphi(x) \cdot f(t,x) < 0$ *pour tout* $x \in \varphi^{-1}(0)$, $t \in \mathbb{R}$
- *ou (b)* $D\varphi(x) \cdot f(t,x) \leqslant 0$ *pour tout* $x \in \varphi^{-1}(]-\infty,0])$, $t \in \mathbb{R}$.

Si pour $y_0 \in F$, $(y(\cdot), I)$ *est la solution maximale de* $\dot{y} = f(t,y)$ *telle que* $y(t_0) = y_0$, *alors pour tout* $t \in [t_0, \infty[\cap I$, $y(t) \in F$.

Corollaire

En particulier, si F *est compact,* $I \supset [t_0, \infty[$.

Démonstration :

Démonstration : Sous l'hypothèse (a) :

Démonstration : Sous l'hypothèse (a) : Supposons que $I =]a, b[$. On doit démontrer que l'ensemble $E := \{t \in]t_0, b[: \varphi(y(t)) > 0\}$ est vide. Si ce n'était pas le cas on pourrait définir son inf, disons $t_* > t_0$ (car $\varphi(y(t_0)) \leqslant 0$). On aurait $\varphi(y(t_*)) = 0$ et pour une suite de $\delta_n > 0$, $\lim \delta_n = 0$ on aurait $\varphi(y(t_* + \delta_n)) > 0$.

Démonstration : Sous l'hypothèse (a) : Supposons que $I =]a, b[$. On doit démontrer que l'ensemble $E := \{t \in]t_0, b[: \varphi(y(t)) > 0\}$ est vide. Si ce n'était pas le cas on pourrait définir son inf, disons $t_* > t_0$ (car $\varphi(y(t_0)) \leqslant 0$). On aurait $\varphi(y(t_*)) = 0$ et pour une suite de $\delta_n > 0$, $\lim \delta_n = 0$ on aurait $\varphi(y(t_* + \delta_n)) > 0$.
Comme $\varphi(y(t_*)) = 0$ on a $D\varphi(y(t_*)) \cdot f(t_*, y(t_*)) < 0$.
Or pour $\delta > 0$ petit

$$\begin{aligned}
\varphi(y(t_* + \delta)) &= \varphi(y(t_*)) + \delta D\varphi(y(t_*)) \cdot f(t_*, y(t_*)) + o(\delta) \\
&= \varphi(y(t_*)) + \delta \times (\textit{qq. chose indep. de } \delta \textit{ qui est } < 0) + o(\delta) \\
&< \varphi(y(t_*)) \leqslant 0
\end{aligned}$$

en en particulier $\varphi(y(t_* + \delta_n)) < 0$ ce qui est absurde. □

Démonstration : Sous l'hypothèse (a) : Supposons que $I =]a, b[$. On doit démontrer que l'ensemble $E := \{t \in]t_0, b[: \varphi(y(t)) > 0\}$ est vide. Si ce n'était pas le cas on pourrait définir son inf, disons $t_* > t_0$ (car $\varphi(y(t_0)) \leqslant 0$). On aurait $\varphi(y(t_*)) = 0$ et pour une suite de $\delta_n > 0$, $\lim \delta_n = 0$ on aurait $\varphi(y(t_* + \delta_n)) > 0$.
Comme $\varphi(y(t_*)) = 0$ on a $D\varphi(y(t_*)) \cdot f(t_*, y(t_*)) < 0$.
Or pour $\delta > 0$ petit

$$\begin{aligned}\varphi(y(t_* + \delta)) &= \varphi(y(t_*)) + \delta D\varphi(y(t_*)) \cdot f(t_*, y(t_*)) + o(\delta) \\ &= \varphi(y(t_*)) + \delta \times (qq.\ chose\ indep.\ de\ \delta\ qui\ est\ < 0) + o(\delta) \\ &< \varphi(y(t_*)) \leqslant 0\end{aligned}$$

en en particulier $\varphi(y(t_* + \delta_n)) < 0$ ce qui est absurde. □

Démonstration : Sous l'hypothèse (a) : Supposons que $I =]a, b[$. On doit démontrer que l'ensemble $E := \{t \in]t_0, b[: \varphi(y(t)) > 0\}$ est vide. Si ce n'était pas le cas on pourrait définir son inf, disons $t_* > t_0$ (car $\varphi(y(t_0)) \leqslant 0$). On aurait $\varphi(y(t_*)) = 0$ et pour une suite de $\delta_n > 0$, $\lim \delta_n = 0$ on aurait $\varphi(y(t_* + \delta_n)) > 0$.
Comme $\varphi(y(t_*)) = 0$ on a $D\varphi(y(t_*)) \cdot f(t_*, y(t_*)) < 0$.
Or pour $\delta > 0$ petit

$$\begin{aligned}
\varphi(y(t_* + \delta)) &= \varphi(y(t_*)) + \delta D\varphi(y(t_*)) \cdot f(t_*, y(t_*)) + o(\delta) \\
&= \varphi(y(t_*)) + \delta \times (\textit{qq. chose indep. de } \delta \textit{ qui est } < 0) + o(\delta) \\
&< \varphi(y(t_*)) \leqslant 0
\end{aligned}$$

en en particulier $\varphi(y(t_* + \delta_n)) < 0$ ce qui est absurde. □
Sous l'hypothèse (b) : Voir la version longue. □

- Si $f(t,y) = (-y_1^3 + y_2^2 + 2ty_1, -y_2^5 + 3ty_1^2)$, les solutions sont définies jusqu'en $+\infty$ car pour $|y| = R$ assez grand et tout t, $\langle y, f(t,y)\rangle < 0$ (critère (a)).

- Si $f(t,y) = (-y_1^3 + y_2^2 + 2ty_1, -y_2^5 + 3ty_1^2)$, les solutions sont définies jusqu'en $+\infty$ car pour $|y| = R$ assez grand et tout t, $\langle y, f(t,y)\rangle < 0$ (critère (a)).
- L'équation $\ddot{x} = -\nabla V(x) - \gamma\dot{x}$ ($\gamma > 0$) vérifie le critère (b) précédent avec $\varphi(x,\dot{x}) = E = (1/2)|\dot{x}|^2 + V(x)$. Si les ensembles $\varphi^{-1}((-\infty, E])$ sont compacts, les solutions maximales sont définies pour $t \to \infty$.

Critère analytique : Lemme de Gronwall

Critère analytique : Lemme de Gronwall

Théorème

$\rho(\cdot)$ *sol. de* $\dot{\rho}(t) = g(t, \rho(t))$ *définie sur* $[t_0, t_1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [t_0, t_1],\ |y'(t)| \leqslant g(t, |y(t)|) \\ |y(t_0)| \leqslant \rho(t_0) \end{array} \right. \Longrightarrow \forall t \in [t_0, t_1],\ |y(t)| \leqslant \rho(t).$$

Critère analytique : Lemme de Gronwall

Théorème

$\rho(\cdot)$ *sol. de* $\dot\rho(t) = g(t, \rho(t))$ *définie sur* $[t_0, t_1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall t \in [t_0, t_1],\ |y'(t)| \leqslant g(t, |y(t)|) \\ |y(t_0)| \leqslant \rho(t_0) \end{array}\right. \Longrightarrow \forall t \in [t_0, t_1],\ |y(t)| \leqslant \rho(t).$$

Corollaire

Hypothèses :

- $\forall (t, y) \in \Omega,\ |f(t, y)| \leqslant g(t, |y|),\ |y(t_0)| \leqslant \rho(t_0)$
- I *intervalle maximal de def. de* $\dot\rho(t) = g(t, \rho(t)),\ \rho(t_0) = \rho_0$

Conclusion : *l'intervalle maximal de définition de* $\dot y(t) = f(t, y(t))$ *contient* I *et on a* $\forall t \in I,\ |y(t)| \leqslant \rho(t)$.

- **Exemple :** Si $y'(t) \leqslant ay(t) + b$ alors

- **Exemple :** Si $y'(t) \leqslant ay(t) + b$ alors

$$\begin{aligned} \forall\ t \geqslant 0, \quad y(t) &\leqslant e^{at}(y(0) + \int_0^t e^{-as} b ds) \\ &\leqslant e^{at} y(0) + (b/a)(e^{at} - 1) \end{aligned}$$

- **Exemple :** Si $y'(t) \leqslant ay(t) + b$ alors

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y(t) \leqslant e^{at}(y(0) + \int_0^t e^{-as} b ds) \\ \leqslant e^{at} y(0) + (b/a)(e^{at} - 1)$$

- **Très utile** Si $f(t, y)$ est à croissance affine à l'infini ($\|f(t, y)\| \leqslant a(t)\|y\| + b(t)$), le temps de vie de $(*)$ est infini (si Ω est de la forme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$).

- **Exemple :** Si $y'(t) \leqslant ay(t) + b$ alors

$$\begin{aligned}\forall\ t \geqslant 0, \quad y(t) &\leqslant e^{at}(y(0) + \int_0^t e^{-as} b ds)\\ &\leqslant e^{at} y(0) + (b/a)(e^{at} - 1)\end{aligned}$$

- **Très utile** Si $f(t,y)$ est à croissance affine à l'infini ($\|f(t,y)\| \leqslant a(t)\|y\| + b(t)$), le temps de vie de $(*)$ est infini (si Ω est de la forme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$).
- Estimées explicites de la continuité des solutions et de leur temps de vie en fonction du paramètre ou de la condition initiale.

Estimées a priori,

Estimées a priori, exemple.

Estimées a priori, exemple.

$$y'(t) = y(t) + e^{-3t} y(t)^2, \qquad y(0) < 1/2.$$

Alors, $y(\cdot)$ est défini pour tout $t \geqslant 0$ et

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y(t) \leqslant e^t.$$

Estimées a priori, exemple.

$$y'(t) = y(t) + e^{-3t} y(t)^2, \qquad y(0) < 1/2.$$

Alors, $y(\cdot)$ est défini pour tout $t \geqslant 0$ et

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y(t) \leqslant e^t.$$

Preuve : Soit I l'intervalle maximal de définition contenant 0 et

$$T := \inf\{t \in I,\ y(t) > e^t\}.$$

Estimées a priori, exemple.

$$y'(t) = y(t) + e^{-3t}y(t)^2, \qquad y(0) < 1/2.$$

Alors, $y(\cdot)$ est défini pour tout $t \geqslant 0$ et

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y(t) \leqslant e^t.$$

Preuve : Soit I l'intervalle maximal de définition contenant 0 et

$$T := \inf\{t \in I,\ y(t) > e^t\}.$$

On remarque que

$$T \in I \Longrightarrow y(T) = e^T.$$

Estimées **a priori**, **exemple.**

$$y'(t) = y(t) + e^{-3t}y(t)^2, \qquad y(0) < 1/2.$$

Alors, $y(\cdot)$ est défini pour tout $t \geqslant 0$ et

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y(t) \leqslant e^t.$$

Preuve : Soit I l'intervalle maximal de définition contenant 0 et

$$T := \inf\{t \in I,\ y(t) > e^t\}.$$

On remarque que

$$T \in I \Longrightarrow y(T) = e^T.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0, T[$

$$y'(t) \leqslant y(t) + e^{-3t}e^{2t} \leqslant y(t) + e^{-t}$$

donc

$$y(t) \leqslant e^t y_0 + \int_0^t e^{(t-s)} e^{-s} ds \leqslant e^t (y_0 + 1/2) < e^t \leqslant e^T.$$

donc

$$y(t) \leqslant e^t y_0 + \int_0^t e^{(t-s)} e^{-s} ds \leqslant e^t (y_0 + 1/2) < e^t \leqslant e^T.$$

Cela implique

donc

$$y(t) \leqslant e^t y_0 + \int_0^t e^{(t-s)} e^{-s} ds \leqslant e^t (y_0 + 1/2) < e^t \leqslant e^T.$$

Cela implique

- $T \notin I$ car sinon $e^T = y(T) < y(T)$.

donc

$$y(t) \leqslant e^t y_0 + \int_0^t e^{(t-s)} e^{-s} ds \leqslant e^t (y_0 + 1/2) < e^t \leqslant e^T.$$

Cela implique

- $T \notin I$ car sinon $e^T = y(T) < y(T)$.
- $T = \infty$ car sinon $\forall\ t \in I \cap [0, \infty[,\ y(t) \leqslant e^T$ et cela viole le théorème de sortie de tout compact.

donc

$$y(t) \leqslant e^t y_0 + \int_0^t e^{(t-s)} e^{-s} ds \leqslant e^t (y_0 + 1/2) < e^t \leqslant e^T.$$

Cela implique

- $T \notin I$ car sinon $e^T = y(T) < y(T)$.
- $T = \infty$ car sinon $\forall\ t \in I \cap [0, \infty[,\ y(t) \leqslant e^T$ et cela viole le théorème de sortie de tout compact.

Ainsi, $[0, \infty[\subset I$ et $T = \infty$. $\square$

Sommaire Plan du cours 3

$f : \Omega \times \Lambda \to E$, $f : (t, y, \lambda) \mapsto f(t, y, \lambda)$ (λ : paramètre) classe C^k.
$(t_0, v_0) \in \Omega$, $\lambda_0 \in \Lambda$.

$f : \Omega \times \Lambda \to E$, $f : (t, y, \lambda) \mapsto f(t, y, \lambda)$ (λ : paramètre) classe C^k.
$(t_0, v_0) \in \Omega$, $\lambda_0 \in \Lambda$.
Problème de Cauchy

$$(P.C.)_{v,\lambda} \quad \begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t), \lambda) \\ y(t_0) & = v \end{cases}$$

$f : \Omega \times \Lambda \to E$, $f : (t, y, \lambda) \mapsto f(t, y, \lambda)$ (λ : paramètre) classe C^k.
$(t_0, v_0) \in \Omega$, $\lambda_0 \in \Lambda$.
Problème de Cauchy

$$(P.C.)_{v,\lambda} \quad \begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t), \lambda) \\ y(t_0) & = v \end{cases}$$

Hypothèse : $y_0(\cdot) := y_{v_0,\lambda_0}(\cdot)$ solution de $(P.C.)_{v_0\lambda_0}$ sur l'intervalle

(global) $[t_0, t_1]$ (donc sur $[t_0 - \delta, t_1 + \delta]$).

Théorème (Théorème de dépendance différentiable et linéarisation)

Théorème (Théorème de dépendance différentiable et linéarisation)

- $\exists\ \mathcal{W} \in Vois_{(\lambda_0,v_0)}, \forall(\lambda, v) \in \mathcal{W}, \exists! y_{\lambda,v}(\cdot)$ *sol. de* $(P.C.)_{\lambda,v}$ *sur* $[t_0, t_1]$

Théorème (Théorème de dépendance différentiable et linéarisation)

- $\exists\ \mathcal{W} \in Vois_{(\lambda_0, v_0)}$, $\forall (\lambda, v) \in \mathcal{W}$, $\exists ! y_{\lambda,v}(\cdot)$ *sol. de* $(P.C.)_{\lambda,v}$ *sur* $[t_0, t_1]$
- $(\lambda, v) \mapsto y_{\lambda,v}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ *classe C^k.*

Théorème (Théorème de dépendance différentiable et linéarisation)

- $\exists\ \mathcal{W} \in Vois_{(\lambda_0, v_0)}$, $\forall (\lambda, v) \in \mathcal{W}$, $\exists ! y_{\lambda,v}(\cdot)$ *sol. de* $(P.C.)_{\lambda,v}$ *sur* $[t_0, t_1]$
- $(\lambda, v) \mapsto y_{\lambda,v}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ *classe* C^k.
- *Dérivée* $(D_{v,\lambda} y)(v_0, \lambda_0) \cdot (\Delta v, \Delta\lambda) = \Delta y(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ *sol. de l'EDO affine appelée : équation linéarisée.*

$$\iff \begin{cases} (\Delta y)'(t) & = D_y f(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta y(t) + D_\lambda f(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta\lambda \\ \Delta y(t_0) & = \Delta v. \end{cases}$$

Théorème (Théorème de dépendance différentiable et linéarisation)

- $\exists\ \mathcal{W} \in Vois_{(\lambda_0,v_0)}$, $\forall(\lambda,v) \in \mathcal{W}$, $\exists! y_{\lambda,v}(\cdot)$ *sol. de* $(P.C.)_{\lambda,v}$ *sur* $[t_0,t_1]$
- $(\lambda,v) \mapsto y_{\lambda,v}(\cdot) \in C^1([t_0,t_1],E)$ *classe* C^k.
- *Dérivée* $(D_{v,\lambda}y)(v_0,\lambda_0)\cdot(\Delta v,\Delta\lambda) = \Delta y(\cdot) \in C^1([t_0,t_1],E)$ *sol. de l'EDO affine appelée : équation linéarisée.*

$$\iff \begin{cases} (\Delta y)'(t) & = D_y f(t,y_0(t),\lambda_0)\cdot\Delta y(t) + D_\lambda f(t,y_0(t),\lambda_0)\cdot\Delta\lambda \\ \Delta y(t_0) & = \Delta v. \end{cases}$$

On applique le théorème des fonctions implicites à l'application $\Phi : C^1([t_0,t_1],E)\times E\times\Lambda \to C^1([t_0,t_1],E)$ définie par,

$$\Phi(y(\cdot),v,\lambda) = v + \int_{t_0}^{\cdot} f(s,y(s),\lambda)ds - y(\cdot),$$

Application à la méthode des perturbations

Nous étudions à présent des équations de la forme

Application à la méthode des perturbations

Nous étudions à présent des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) + \epsilon g(t, y(t))$$

Application à la méthode des perturbations

Nous étudions à présent des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) + \epsilon g(t, y(t))$$

et nous supposons que

Application à la méthode des perturbations

Nous étudions à présent des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) + \epsilon g(t, y(t))$$

et nous supposons que

- f_0, g sont C^∞ (ou C^k)

Application à la méthode des perturbations

Nous étudions à présent des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) + \epsilon g(t, y(t))$$

et nous supposons que

- f_0, g sont C^∞ (ou C^k)
- $y_0(\cdot)$ est une solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{array} \right.$$

Application à la méthode des perturbations

Nous étudions à présent des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) + \epsilon g(t, y(t))$$

et nous supposons que

- f_0, g sont C^∞ (ou C^k)
- $y_0(\cdot)$ est une solution de

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

  sur un intervalle $[t_0, t_1]$.

Application à la méthode des perturbations

Nous étudions à présent des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) + \epsilon g(t, y(t))$$

et nous supposons que

- f_0, g sont C^∞ (ou C^k)
- $y_0(\cdot)$ est une solution de

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

  sur un intervalle $[t_0, t_1]$.
- ϵ est un petit paramètre, disons réel.

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable $\Longrightarrow \exists \epsilon_0$, $\forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ $\exists y(\epsilon, \cdot)$ sol. de

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable $\Longrightarrow \exists \epsilon_0$, $\forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ $\exists y(\epsilon, \cdot)$ sol. de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{array} \right.$$

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable $\Longrightarrow \exists \epsilon_0,\ \forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)\ \exists y(\epsilon, \cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

et $y(\epsilon, t)$ C^k en ϵ et en t ;

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable $\Longrightarrow \exists \epsilon_0$, $\forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ $\exists y(\epsilon, \cdot)$ sol. de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{array} \right.$$

et $y(\epsilon, t)$ C^k en ϵ et en t ;
En fait $\epsilon \mapsto y(\epsilon, \cdot)$, $(-\epsilon_0, \epsilon_0) \to C^1([t_0, t_1], E)$ est C^k.

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable $\Longrightarrow \exists \epsilon_0$, $\forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ $\exists y(\epsilon, \cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

et $y(\epsilon, t)$ C^k en ϵ et en t ;
En fait $\epsilon \mapsto y(\epsilon, \cdot)$, $(-\epsilon_0, \epsilon_0) \to C^1([t_0, t_1], E)$ est C^k.
Par conséquent, on peut écrire un

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable $\Longrightarrow \exists \epsilon_0, \forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)\ \exists y(\epsilon, \cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

et $y(\epsilon, t)$ C^k en ϵ et en t ;
En fait $\epsilon \mapsto y(\epsilon, \cdot)$, $(-\epsilon_0, \epsilon_0) \to C^1([t_0, t_1], E)$ est C^k.
Par conséquent, on peut écrire un développement limité

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable $\Longrightarrow \exists \epsilon_0,\ \forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)\ \exists y(\epsilon, \cdot)$ sol. de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{array} \right.$$

et $y(\epsilon, t)$ C^k en ϵ et en t ;
En fait $\epsilon \mapsto y(\epsilon, \cdot)$, $(-\epsilon_0, \epsilon_0) \to C^1([t_0, t_1], E)$ est C^k.
Par conséquent, on peut écrire un développement limité

$$y(\epsilon, t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \cdots + \epsilon^k y_k(t) + o(\epsilon^k, t)$$

où $o(\epsilon^k)(\cdot) = \epsilon^k \nu(\epsilon)(\cdot)$ avec $\|\nu(\epsilon)(\cdot)\|_{C^1([t_0,t_1])}$ tend vers 0 avec ϵ.

Application à la méthode des perturbations

Le but de la théorie des perturbations est de déterminer les fonctions $y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)$.

Application à la méthode des perturbations

Le but de la théorie des perturbations est de déterminer les fonctions $y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)$.
Pour cela :

Application à la méthode des perturbations

Le but de la théorie des perturbations est de déterminer les fonctions $y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)$.
Pour cela :

- On injecte

$$y(\epsilon, t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \cdots + \epsilon^k y_k(t) + o(\epsilon^k)(t)$$

  dans

$$\begin{cases} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Le but de la théorie des perturbations est de déterminer les fonctions $y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)$.
Pour cela :

- On injecte

$$y(\epsilon, t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \cdots + \epsilon^k y_k(t) + o(\epsilon^k)(t)$$

  dans

$$\begin{cases} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

- et on utilise le fait qu'un développement limité est unique.