M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

13 octobre 2021 (2 CM)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet, résonance paramérique.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet, résonance paramérique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie. ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire

- Existence et unicité locale cas général : Théorème de Cauchy Lipschitz.

Rappels

- Existence et unicité locale cas général : Théorème de Cauchy Lipschitz.
- Unicité globale.

Rappels

- Existence et unicité locale cas général : Théorème de Cauchy Lipschitz.
- Unicité globale.
- Critère d'existence globale (croissance affine à l'infini).

Rappels

- Existence et unicité locale cas général : Théorème de Cauchy Lipschitz.
- Unicité globale.
- Critère d'existence globale (croissance affine à l'infini).
- Existence et unicité globales des EDO affines

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t).$$

Les solutions dépendent continument des paramètres A, b et de la condition initiale.

Sommaire

Equations linéaires à coefficients constants

$A \in M(n, \mathbb{R})$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Equations linéaires à coefficients constants

$A \in M(n, \mathbb{R})$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Solution facile à écrire :

Equations linéaires à coefficients constants

$A \in M(n, \mathbb{R})$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Solution facile à écrire :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$$

Equations linéaires à coefficients constants

$A \in M(n, \mathbb{R})$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Solution facile à écrire :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$$

où pour $B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$e^B = \exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \in GL(n, \mathbb{K})$$

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$
- N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ N^k = 0$;

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$
- N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ N^k = 0$;
- S et N commutent : $SN = NS$ (en fait polynomiales en A).

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$
- N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ N^k = 0$;
- S et N commutent : $SN = NS$ (en fait polynomiales en A).
- $e^{tA} = e^{tS}e^{tN} = P\mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})P^{-1} \sum_{k=0}^{p-1}(t^k/k!)N^k$.

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$
- N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $N^k = 0$;
- S et N commutent : $SN = NS$ (en fait polynomiales en A).
- $e^{tA} = e^{tS}e^{tN} = P\mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})P^{-1}\sum_{k=0}^{p-1}(t^k/k!)N^k$.

Théorème

Les coefficients de $e^{tA}X_0$ sont des combinaisons linéaires de termes de la forme $t^p e^{t\lambda_q}$, $(0 \leqslant p \leqslant k-1,\ 1 \leqslant q \leqslant n)$

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$;

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$;
- $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ A-invariant (espaces caractéristiques) ;

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$;
- $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ A-invariant (espaces caractéristiques) ;
- $A|\Gamma_{\lambda_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{\Gamma_i} + n_i$ où $n_i \in \mathrm{End}(\Gamma_{\lambda_i})$ nilpotent d'ordre α_i ($n_i^{\alpha_i - 1} \neq 0$, $n_i^{\alpha_i} = 0$).

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$;
- $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ A-invariant (espaces caractéristiques) ;
- $A|\Gamma_{\lambda_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{\Gamma_i} + n_i$ où $n_i \in \mathrm{End}(\Gamma_{\lambda_i})$ nilpotent d'ordre α_i ($n_i^{\alpha_i - 1} \neq 0$, $n_i^{\alpha_i} = 0$).

$$\Longrightarrow \exp(tA|\Gamma_{\lambda_i}) = e^{t\lambda_i}\exp(tn_i).$$

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$;
- $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ A-invariant (espaces caractéristiques) ;
- $A|\Gamma_{\lambda_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{\Gamma_i} + n_i$ où $n_i \in \mathrm{End}(\Gamma_{\lambda_i})$ nilpotent d'ordre α_i ($n_i^{\alpha_i - 1} \neq 0$, $n_i^{\alpha_i} = 0$).

$$\Longrightarrow \exp(tA|\Gamma_{\lambda_i}) = e^{t\lambda_i} \exp(tn_i).$$

et $\|\exp(tn_i)\|$ est à croissance au plus polynomiale quand $t \to \pm\infty$.

La décompositon géométrique précédente a un sens dynamique :

Théorème

On a $\mathbb{K}^n = \Gamma_s \oplus \Gamma_u \oplus \Gamma_c$ (espaces stable, instable, central) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) où

- $\Gamma_s(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i<0} \ker(A-\lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \lim_{t\to\infty} \|e^{tA}.v\| = 0\}$
- $\Gamma_u(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i>0} \ker(A-\lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \lim_{t\to-\infty} \|e^{tA}.v\| = 0\}$
- $\Gamma_c(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i=0} \ker(A-\lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \exists C, M,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{tA}.v\| \leqslant C(1+|t|)^M \|v\|.\}$

On a alors le résultat plus précis suivant :

Théorème

Pour tous $0 < \lambda_s < \min\limits_{\Re\lambda_i<0} |\Re\lambda_i|$, $0 < \lambda_u < \min\limits_{\Re\lambda_i>0} \Re\lambda_i$, *il existe* $C > 0$ *tel que*

- $\forall v \in \Gamma_s(A),\ \forall t > 0,\ \|e^{tA}.v\| \leqslant Ce^{-\lambda_s t}\|v\|,\ \|e^{-tA}.v\| \geqslant Ce^{\lambda_s t}\|v\|$
- $\forall v \in \Gamma_u(A),\ \forall t > 0,\ \|e^{-tA}.v\| \leqslant Ce^{-\lambda_u t}\|v\|,\ \|e^{tA}.v\| \geqslant Ce^{\lambda_u t}\|v\|$
- $\forall v \in \Gamma_c(A),\ \forall t \in \mathbb{R},\ C^{-1}\|v\| \leqslant \|e^{tA}.v\| \leqslant C(1+|t|)^n\|v\|.$

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.
On dit que 0 est asymptotiquement stable (quand $t \to +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.
On dit que 0 est asymptotiquement stable (quand $t \to +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Théorème (Critère de Routh)

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.
On dit que 0 est asymptotiquement stable (quand $t \to +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Théorème (Critère de Routh)

- *l'origine est asymptotiquement stable (quand $t \to \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives.*

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.
On dit que 0 est asymptotiquement stable (quand $t \to +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Théorème (Critère de Routh)

- *l'origine est asymptotiquement stable (quand $t \to \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives.*
- *l'origine est stable (quand $t \to \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles négatives et celles λ_i qui sont de parties réelles nulles sont telles que pour tout $q \geqslant 1$ $\ker(A - \lambda_i I)^q = \ker(A - \lambda_i I)$ (on dit que A est diagonalisable en λ_i)*

Cas particulier important : $A \in sl(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
On a alors pour tout t, $e^{tA} \in SL(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \det M = 1\}$.

Cas particulier important : $A \in sl(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
On a alors pour tout t, $e^{tA} \in SL(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \det M = 1\}$.
Le cas général se ramène facilement à ce cas : si $A \in M(2,\mathbb{R})$,
$\tilde{A} := A - (\mathrm{tr}(A)/2)I \in sl(2,\mathbb{R})$ et $e^{tA} = e^{t(\mathrm{tr}(A)/2)}e^{t\tilde{A}}$.

Cas particulier important : $A \in sl(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
On a alors pour tout t, $e^{tA} \in SL(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \det M = 1\}$.
Le cas général se ramène facilement à ce cas : si $A \in M(2,\mathbb{R})$,
$\tilde{A} := A - (\mathrm{tr}(A)/2)I \in sl(2,\mathbb{R})$ et $e^{tA} = e^{t(\mathrm{tr}(A)/2)}e^{t\tilde{A}}$.
Dans la suite on se concentre sur le cas où $A \in sl(2,\mathbb{R})$.

Cas particulier important : $A \in sl(2, \mathbb{R}) := \{M \in M(2, \mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
On a alors pour tout t, $e^{tA} \in SL(2, \mathbb{R}) := \{M \in M(2, \mathbb{R}) : \det M = 1\}$.
Le cas général se ramène facilement à ce cas : si $A \in M(2, \mathbb{R})$,
$\tilde{A} := A - (\mathrm{tr}(A)/2)I \in sl(2, \mathbb{R})$ et $e^{tA} = e^{t(\mathrm{tr}(A)/2)} e^{t\tilde{A}}$.
Dans la suite on se concentre sur le cas où $A \in sl(2, \mathbb{R})$.
On posera dans la suite $\omega = \sqrt{|\det A|}$.

Si $\det A > 0$:

- deux v.p. imaginaires pures $\pm i\omega$
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$;
- toutes les orbites sont des ellipses parcourues avec la même période : A est elliptique.
- L'origine est stable.
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1}$

Si $\det A < 0$:

- deux v.p. réelles opposées $\pm\omega$;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_s(A) \oplus \Gamma_u(A)$ où $\Gamma_s = \mathbb{R}v_s$, $\Gamma_u = \mathbb{R}v_u$.
- Les orbites sont des hyperboles : A est hyperbolique
- L'origine est instable.
- Il existe $P \in GL(2,\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\omega t} \end{pmatrix} P^{-1}$

Si $\det A = 0$:

- deux v.p. nulles ;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$ mais A est nilpotente d'ordre 2 ou égale à $\pm Id$
- A est dite parabolique
- L'origine est instable si $a \neq 0$ (stable sinon).
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $A = P \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} 1 & ta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exemples

1) Résoudre avec $a, b \in]0, \infty[$,

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0.$$

Exemples

1) Résoudre avec $a, b \in]0, \infty[$,

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0.$$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, il est équivalent de résoudre

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

dont les solutions sont

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \qquad X_0 \in \mathbb{R}^2.$$

Exemples

1) Résoudre avec $a, b \in]0, \infty[$,

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0.$$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, il est équivalent de résoudre

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

dont les solutions sont

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \qquad X_0 \in \mathbb{R}^2.$$

Pour calculer l'exponentielle de matrice on tente de diagonaliser A. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(T) = \det(T - A)$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ b & T + a \end{pmatrix} = T^2 + aT + b.$$

Ses racines sont

Exemples

Ses racines sont

1. Si $\Delta = a^2 - 4b > 0$ distinctes et réelles < 0

$$\lambda_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < 0$$

Exemples

Ses racines sont

1. Si $\Delta = a^2 - 4b > 0$ distinctes et réelles < 0

$$\lambda_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < 0$$

2. Si $\Delta < 0$, distinctes de parties réelles < 0

$$\lambda_\pm = \frac{-a \pm i\sqrt{|a^2 - 4b|}}{2} < 0$$

Exemples

Ses racines sont

1. Si $\Delta = a^2 - 4b > 0$ distinctes et réelles < 0

$$\lambda_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < 0$$

2. Si $\Delta < 0$, distinctes de parties réelles < 0

$$\lambda_{\pm} = \frac{-a \pm i\sqrt{|a^2 - 4b|}}{2} < 0$$

3. Si $\Delta = 0$, égales à $\lambda = -a/2 < 0$.

Exemples

Ses racines sont

1. Si $\Delta = a^2 - 4b > 0$ distinctes et réelles < 0

$$\lambda_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < 0$$

2. Si $\Delta < 0$, distinctes de parties réelles < 0

$$\lambda_\pm = \frac{-a \pm i\sqrt{|a^2 - 4b|}}{2} < 0$$

3. Si $\Delta = 0$, égales à $\lambda = -a/2 < 0$.

Dans tous les cas, elles sont de parties réelles < 0 donc, d'après le **critère de Routh**, 0 est un équilibre asymptotiquement stable.

Exemples

Dans le cas $\Delta \neq 0$, les vp $\lambda_\pm$ de A sont distinctes et les solutions de

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

sont de la forme

$$x(t) = \mu_+ e^{t\lambda_+} + \mu_- e^{t\lambda_-}$$

Exemples

Dans le cas $\Delta \neq 0$, les vp $\lambda_\pm$ de A sont distinctes et les solutions de

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

sont de la forme

$$x(t) = \mu_+ e^{t\lambda_+} + \mu_- e^{t\lambda_-}$$

Dans le cas $\Delta = 0$ elles sont de la forme

$$x(t) = (\mu + \nu t)e^{t\lambda}.$$

Exemples

2) Oscillateur harmonique

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Exemples

2) Oscillateur harmonique

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

L'EDO s'écrit avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, sous la forme

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les solutions sont

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \qquad X_0 \in \mathbb{R}^2.$$

Exemples

2) Oscillateur harmonique

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

L'EDO s'écrit avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, sous la forme

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les solutions sont

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \qquad X_0 \in \mathbb{R}^2.$$

La matrice A est de trace nulle, donc dans $sl(2, \mathbb{R})$.

Exemples

Comme $\det A = \omega^2 \geqslant 0$ on a

Exemples

Comme $\det A = \omega^2 \geqslant 0$ on a

- Si $\omega \neq 0$, la matrice A est elliptique et donc 0 est stable (on peut aussi remarquer que les vp de A sont distinctes et imaginaires pures et utiliser le critère de Routh). Les solutions de

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

sont de la forme

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

et celles de $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ s'écrivent

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t).$$

Exemples

Comme $\det A = \omega^2 \geqslant 0$ on a

- Si $\omega \neq 0$, la matrice A est elliptique et donc 0 est stable (on peut aussi remarquer que les vp de A sont distinctes et imaginaires pures et utiliser le critère de Routh). Les solutions de

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

sont de la forme

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

et celles de $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ s'écrivent

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t).$$

Elles sont toutes périodiques de période $2\pi/\omega$.

Exemples

Comme $\det A = \omega^2 \geqslant 0$ on a

- Si $\omega \neq 0$, la matrice A est elliptique et donc 0 est stable (on peut aussi remarquer que les vp de A sont distinctes et imaginaires pures et utiliser le critère de Routh). Les solutions de

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

sont de la forme

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

et celles de $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ s'écrivent

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t).$$

Elles sont toutes périodiques de période $2\pi/\omega$.

Exemples

En fait le calcul de l'exponentielle e^{tA} montre que

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)X_0 = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} X_0$$

Exemples

En fait le calcul de l'exponentielle e^{tA} montre que

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)X_0 = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} X_0$$

- Si $\omega = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est parabolique (elle est nilpotente), donc

$$X(t) = e^{tA}X(0) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(0)$$

  et les solutions de $x''(t) = 0$ sont de la forme

$$x(t) = \mu t + \nu.$$

3) Trouver la forme générale des solutions de l'EDO scalaire d'ordre n

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = 0.$$

On veut résoudre à présent avec $A : I \to M(n, \mathbb{R})$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ continues

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + b(t) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Théorème (Variation de la constante (I))

On a pour tout t

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s) ds.$$

On veut résoudre à présent avec $A : I \to M(n, \mathbb{R})$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ continues

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + b(t) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Théorème (Variation de la constante (I))

On a pour tout t

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s) ds.$$

Démonstration. En effet si on pose $Y(t) := e^{-tA} X(t)$ on a

$$Y'(t) = -Ae^{-tA} X(t) + e^{-tA}(AX(t) + b(t)) = e^{-tA} b(t).$$

$\square$

Sommaire

Equations linéaires dépendant du temps

E.D.O. affines :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$

Equations linéaires dépendant du temps

E.D.O. affines :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

où $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$

EDO linéaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ sol. de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)\}$: $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ sol. de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)\}$: $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\dim \mathcal{E}_{A(\cdot)} = n$

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ sol. de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)\}$: $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\dim \mathcal{E}_{A(\cdot)} = n$
- car $\mathbb{K}^n \to \mathcal{E}_{A(\cdot)}$, $v \mapsto X_v(\cdot)$ t.q $X_v(t_0) = v$ est un isomorphisme (linéarité + $\exists!$)

- $\mathcal{E}_{A(\cdot)} = \{X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \text{ sol. de } \dot{X}(t) = A(t)X(t)\}$: $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\dim \mathcal{E}_{A(\cdot)} = n$
- car $\mathbb{K}^n \to \mathcal{E}_{A(\cdot)}$, $v \mapsto X_v(\cdot)$ t.q $X_v(t_0) = v$ est un isomorphisme (linéarité $+ \exists !$)

Définition

Résolvante $R_A(t,s) \in GL(n,\mathbb{K})$ $(t, s \in I)$ *de* $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$

$$X(\cdot) \in \mathcal{E}_A \iff \forall\, t, s \in I, \quad X(t) = R_A(t,s)X(s).$$

(1) (Chasles) : $t_1, t_2, t_3 \in I$,

$$R_A(t_3, t_1) = R_A(t_3, t_2)R_A(t_2, t_1)$$

$(R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)^{-1}.)$

(1) (Chasles) : $t_1, t_2, t_3 \in I$,

$$R_A(t_3, t_1) = R_A(t_3, t_2) R_A(t_2, t_1)$$

$(R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)^{-1}.)$

(2) $t_0 \in I$ fixé, $t \mapsto R_A(t, t_0)$ vérifie l'EDO matricielle (attention l'espace des phases est $M(n, \mathbb{K})$)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} R_A(t, t_0) = A(t) R_A(t, t_0) \\ R_A(t_0, t_0) = I \end{cases}$$

(3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$.

(3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$.

(4) (Cas constant) Si $A(\cdot) \equiv$ *constante* on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)

(3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$.

(4) (Cas constant) Si $A(\cdot) \equiv$ *constante* on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)

(5) (Liouville) On a

$$\det R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))ds}$$

(3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$.

(4) (Cas constant) Si $A(\cdot) \equiv$ *constante* on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)

(5) (Liouville) On a

$$\det R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))ds}$$

(6) (Groupes et algèbres de Lie) Soit $U \in GL(n, \mathbb{K})$. Si $A(\cdot)$ est à valeurs dans (l'algèbre de Lie) $\mathfrak{g}_U = \{M \in M(n, \mathbb{K}) : {}^tMU + UM = 0\}$ alors $R_A(\cdot, t_0)$ est à valeurs dans le groupe (de Lie) $G_U = \{P \in GL(n, \mathbb{K}) : {}^tPUP = U\}$.

On ne sait pas en général calculer R_A mais

(7) Si $\forall t, s \in I$ $A(t)$ et $A(s)$ commutent $R_A(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} (A(s)) ds}$

On ne sait pas en général calculer R_A mais

(7) Si $\forall t, s \in I$ $A(t)$ et $A(s)$ commutent $R_A(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t}(A(s))ds}$

(8)

$$\begin{aligned} R_A(t,t_0) &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0 \leqslant s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant t} A(s_n)\cdots A(s_1) ds_1 \cdots ds_n \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{s_1,\ldots,s_n \in [t_0,t]} T(A(s_1)\cdots A(s_n)) ds_1 \cdots ds_n \end{aligned}$$

où $T(A(s_1)\cdots A(s_n)) = A(s_{\sigma(1)})\cdots A(s_{\sigma(n)})$, (produit chronologique) $s_{\sigma(1)} > \cdots > s_{\sigma(n)}$

La résolvante : résoudre toutes les équations affines

La résolvante : résoudre toutes les équations affines

Théorème (Variation de la constante)

$X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$ *ssi*

$$\forall t,\ X(t) = R_A(t,t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} R_A(t,s)b(s)ds.$$

Sommaire

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$

Théorie des perturbations (cas linéaire)

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$
- ϵ petit paramètre réel.

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$
- ϵ petit paramètre réel.

Problème :

$$A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$$

- A_0 constante (ou de résolvante connue) ;
- $F(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$
- ϵ petit paramètre réel.

Problème : estimer la résolvante R_{A_ϵ} ;

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \ C^\infty \text{ (analytique).}$$

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \ C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \;\; C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \ C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

où $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^1(I)} \leqslant \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \;\; C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

où $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^1(I)} \leqslant \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Déterminer

Application à la méthode des perturbations

Théorème de dépendance différentiable (cas linéaire) :

$$\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0) \;\; C^\infty \text{ (analytique).}$$

Développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t, 0) = R_{A_0}(t, 0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

où $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^1(I)} \leqslant \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Déterminer $Y_1(\cdot), \ldots, Y_k(\cdot)$.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

Théorie des perturbations (cas linéaire)

- On injecte

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

dans

$$\begin{cases} \dot{R}_{A_\epsilon}(t,0) = (A_0 + \epsilon F(t))R_{A_\epsilon}(t,0) \\ R_{A_\epsilon}(0,0) = I \end{cases}$$

Théorie des perturbations (cas linéaire)

- On injecte

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

dans

$$\begin{cases} \dot{R}_{A_\epsilon}(t,0) = (A_0 + \epsilon F(t)) R_{A_\epsilon}(t,0) \\ R_{A_\epsilon}(0,0) = I \end{cases}$$

- et on utilise le fait qu'un développement limité est unique.