M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

6 octobre 2021 (2 CM)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet, résonance paramérique.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet, résonance paramérique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie. ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire

- E espace de Banach : espace des phases (p. ex. $\mathbb{R}^n$ ou esp. dim. infinie).
- $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $t_0 \in I$.
- $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$ ouvert, $(t_0, y_0) \in \Omega$.
- $f : \Omega \to E$ continue

- E espace de Banach : espace des phases (p. ex. $\mathbb{R}^n$ ou esp. dim. infinie).
- $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $t_0 \in I$.
- $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$ ouvert, $(t_0, y_0) \in \Omega$.
- $f : \Omega \to E$ continue

Problème de Cauchy : Trouver $y(\cdot) : I \to E$ (C^1) vérifiant l'équation différentielle ordinaire (E.D.O.) :

$$\forall t \in I,\ \ y'(t) = f(t, y(t)), \tag{1}$$

et la condition initiale : $y(t_0) = y_0 \qquad (1')$

Les E.D.O. de la forme

$$\frac{d^k x}{dt^k}(t) = g\left(t, x(t), \ldots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(t)\right) \tag{2}$$

se ramène à

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{3}$$

où $y = (y_1, \ldots, y_k) \in E^k$: on agrandit l'espace des phases :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 & = y_2 \\ \dot{y}_2 & = y_3 \\ \vdots & = \vdots \\ \dot{y}_{k-1} & = y_{k-2} \\ \dot{y}_k & = g(t, y_1(t), \dots, y_{k-1}(t)) \end{cases} \tag{4}$$

$$x(\cdot) \text{ sol. de } (2) \iff (x(\cdot), \frac{dx}{dt}(\cdot), \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(\cdot)) \text{ sol. de } (4)$$

$f : \Omega \subset \mathbb{R} \times E \to E$ continue : f est localement (uniformément) lipschitzienne (en y) sur Ω :
$\forall (t_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times E$, $\exists W \subset \Omega$ vois. de (t_0, y_0), $\exists K_W > 0$, t.q. $\forall (t, y_1)$, $(t, y_2) \in W$

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant K_W \|y_1 - y_2\|.$$

Notation : $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega, E)$.

$f : \Omega \subset \mathbb{R} \times E \to E$ continue : f est localement (uniformément) lipschitzienne (en y) sur Ω :
$\forall (t_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times E$, $\exists W \subset \Omega$ vois. de (t_0, y_0), $\exists K_W > 0$, t.q. $\forall (t, y_1)$, $(t, y_2) \in W$

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant K_W \|y_1 - y_2\|.$$

Notation : $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega, E)$.

Rem. : f C^1 en $y \implies f$ loc. lip.

Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

f localement lipschitzienne sur Ω, $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors, $\exists \delta > 0$ t.q. problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

admet une solution unique définie sur $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Remarques

Remarques

- $\forall L \subset \Omega$ compact $\exists \delta_L$ t.q. $\forall (t_0, y_0) \in L$, $\delta_{(t_0,y_0)} \geqslant \delta_L$

Remarques

- $\forall L \subset \Omega$ compact $\exists \delta_L$ t.q. $\forall (t_0, y_0) \in L$, $\delta_{(t_0,y_0)} \geqslant \delta_L$
- Picard à paramètre : si f dépend C^k d'un paramètre, les sol. dépendent C^k du paramètre ;

Remarques

- $\forall L \subset \Omega$ compact $\exists \delta_L$ t.q. $\forall (t_0, y_0) \in L$, $\delta_{(t_0,y_0)} \geqslant \delta_L$
- Picard à paramètre : si f dépend C^k d'un paramètre, les sol. dépendent C^k du paramètre ;
- Si f seulement continue, l'existence du théor. de Cauchy-Lipschitz est vraie : théorème de Peano ; mais plus nécessairement unicité. Exemple : l'équation différentielle, $y' = \sqrt{(}|y|)$, admet sur $(0, \infty)$ les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ comme solutions vérifiant $y(0) = 0$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Unicité globale

Théorème

$f : \Omega \to E$ localement lipschitzienne sur Ω,

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(\cdot), y_2(\cdot) \textit{ sol. de } y'(t) = f(t, y(t)) \textit{ sur } I \\ y_1(t_0) = y_2(t_0) \end{array} \right. \implies y_1(\cdot) = y_2(\cdot)$$

- Solutions d'un pb. de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ pas toujours définies sur I tout entier.
  Exemples : $y'(t) = 1 + y^2(t)$ admet pour solution $y(t) = \tan(t)$ qui "explose" en $t \in (\pi/2) + \pi\mathbb{Z}$.

- Solutions d'un pb. de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ pas toujours définies sur I tout entier.
  Exemples : $y'(t) = 1 + y^2(t)$ admet pour solution $y(t) = \tan(t)$ qui "explose" en $t \in (\pi/2) + \pi\mathbb{Z}$.
- Notion de temps de vie des solutions, intervalle maximal (voir cours 4)

En anticipant sur le cours 4 :

Théorème (Critère d'existence globale)

$f : I \times E \to E$ à "croissance affine à l'infini" (en particulier si f est affine) : $\exists a(\cdot), b(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ continues t.q.

$$\forall (t, y) \in I \times E, \ \|f(t, y)\| \leqslant a(t)\|y\| + b(t)$$

alors $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$) admet une unique solution définie sur I tout entier.

Sommaire

A présent $\Omega = I \times E$ et $f(t,y) = A(t)y + b(t)$, $A(\cdot) : I \to \mathcal{L}_c(E,E)$ et $b : I \to E$ continues, I intervalle.

Théorème (Existence et Unicité globales dans le cas affine)

$\forall t_0 \in I$ $\forall X_0 \in E$, $\exists! X(\cdot) \in C^1(I,E)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

En outre, si I est borné, l'appl. $C^0(I, \mathcal{L}_c(E,E)) \times C^0(I,E) \times E \to C^0(I,E)$ qui à $(A(\cdot), b(\cdot), X_0)$ associe $X(\cdot)$ est continue (en fait C^∞).

Sommaire

Equations linéaires à coefficients constants

A présent $E = \mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$) et $A(\cdot) = \mathrm{constante} = A \in M(n, \mathbb{R})$ et $b(\cdot) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Equations linéaires à coefficients constants

A présent $E = \mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$) et
$A(\cdot) = \mathrm{constante} = A \in M(n, \mathbb{R})$ et $b(\cdot) = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

Solution facile à écrire :

Equations linéaires à coefficients constants

A présent $E = \mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$) et $A(\cdot) = \mathrm{constante} = A \in M(n, \mathbb{R})$ et $b(\cdot) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Solution facile à écrire :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$$

Equations linéaires à coefficients constants

A présent $E = \mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$) et
$A(\cdot) = \mathrm{constante} = A \in M(n, \mathbb{R})$ et $b(\cdot) = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

Solution facile à écrire :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$$

où pour $B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$e^B = \exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \in GL(n, \mathbb{K})$$

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

1. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

1. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
2. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

1. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
2. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$
3. L'exponentielle : $\mathbb{K}$-analytique (et donc de classe C^∞)

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

1. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
2. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$
3. L'exponentielle : $\mathbb{K}$-analytique (et donc de classe C^∞)
4. $D\exp(0) \cdot H = H, \qquad \forall H \in M_n(\mathbb{K})$.

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

1. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
2. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$
3. L'exponentielle : $\mathbb{K}$-analytique (et donc de classe C^∞)
4. $D\exp(0) \cdot H = H, \qquad \forall H \in M_n(\mathbb{K})$.
5. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent, i.e. $AB = BA$, on a, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. (faux en général)

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

1. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
2. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$
3. L'exponentielle : $\mathbb{K}$-analytique (et donc de classe C^∞)
4. $D\exp(0) \cdot H = H, \qquad \forall H \in M_n(\mathbb{K})$.
5. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent, i.e. $AB = BA$, on a, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. (faux en général)
6. $f(t) = \exp(tA)$ est C^∞ et $f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

1. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
2. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$
3. L'exponentielle : $\mathbb{K}$-analytique (et donc de classe C^∞)
4. $D\exp(0) \cdot H = H, \qquad \forall H \in M_n(\mathbb{K})$.
5. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent, i.e. $AB = BA$, on a, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. (faux en général)
6. $f(t) = \exp(tA)$ est C^∞ et $f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
7. Si $P \in GL(n, \mathbb{K})$, $Pe^AP^{-1} = e^{PAP^{-1}}$.

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

1. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
2. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$
3. L'exponentielle : $\mathbb{K}$-analytique (et donc de classe C^∞)
4. $D\exp(0) \cdot H = H, \qquad \forall H \in M_n(\mathbb{K})$.
5. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent, i.e. $AB = BA$, on a, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. (faux en général)
6. $f(t) = \exp(tA)$ est C^∞ et $f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
7. Si $P \in GL(n, \mathbb{K})$, $Pe^AP^{-1} = e^{PAP^{-1}}$.
8. Si $\Delta = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors $e^\Delta = diag(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$
- N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ N^k = 0$;

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$
- N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ N^k = 0$;
- S et N commutent : $SN = NS$ (en fait polynomiales en A).

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$
- N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ N^k = 0$;
- S et N commutent : $SN = NS$ (en fait polynomiales en A).

Permet calcul de l'exponentielle :

$$e^{tA} = e^{tS}e^{tN} \text{ (}S \text{ et } N \text{ commutent)} = Pe^{\mathrm{diag}(t\lambda_1,\dots,t\lambda_n)}P^{-1}e^{tN}$$

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$
- N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $N^k = 0$;
- S et N commutent : $SN = NS$ (en fait polynomiales en A).

Permet calcul de l'exponentielle :

$$e^{tA} = e^{tS}e^{tN} \text{ (}S\text{ et }N\text{ commutent)} = Pe^{\mathrm{diag}(t\lambda_1,\ldots,t\lambda_n)}P^{-1}e^{tN}$$

avec $e^{tN} = I + tN + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}$: donc polyn. en t et $e^{\mathrm{diag}(t\lambda_1,\ldots,t\lambda_n)} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})$.

Equations linéaires à coefficients constants

Etude de la dynamique

Forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec

- S diagonalisable : $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$
- N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $N^k = 0$;
- S et N commutent : $SN = NS$ (en fait polynomiales en A).

Permet calcul de l'exponentielle :

$$e^{tA} = e^{tS}e^{tN} \text{ (}S\text{ et }N\text{ commutent)} = Pe^{\mathrm{diag}(t\lambda_1,\ldots,t\lambda_n)}P^{-1}e^{tN}$$

avec $e^{tN} = I + tN + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}$: donc polyn. en t et $e^{\mathrm{diag}(t\lambda_1,\ldots,t\lambda_n)} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})$.

Conclusion :

Théorème

Les coefficients de $e^{tA}X_0$ sont des combinaisons linéaires de termes de la forme $t^p e^{t\lambda_q}$, $(0 \leqslant p \leqslant k-1,\ 1 \leqslant q \leqslant n)$

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$;

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$;
- $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ A-invariant (espaces caractéristiques) ;

Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$.
Pol. minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ valeurs propres de A ($1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le pol. caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$;
- $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ A-invariant (espaces caractéristiques) ;
- $A|\Gamma_{\lambda_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{\Gamma_i} + n_i$ où $n_i \in \mathrm{End}(\Gamma_{\lambda_i})$ nilpotent d'ordre α_i ($n_i^{\alpha_i - 1} \neq 0$, $n_i^{\alpha_i} = 0$).

La décompositon géométrique précédente a un sens dynamique :

Théorème

On a $\mathbb{K}^n = \Gamma_s \oplus \Gamma_u \oplus \Gamma_c$ *(espaces stable, instable, central)* $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ *où*

- $\Gamma_s(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i<0} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \lim_{t\to\infty} \|e^{tA}.v\| = 0\}$
- $\Gamma_u(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i>0} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \lim_{t\to-\infty} \|e^{tA}.v\| = 0\}$
- $\Gamma_c(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i=0} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \exists C, M,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{tA}.v\| \leqslant C(1 + |t|)^M \|v\|.\}$

On a alors le résultat plus précis suivant :

Théorème

Pour tous $0 < \lambda_s < \min_{\Re\lambda_i<0} |\Re\lambda_i|$, $0 < \lambda_u < \min_{\Re\lambda_i>0} \Re\lambda_i$, *il existe* $C > 0$ *tel que*

- $\forall v \in \Gamma_s(A),\ \forall t > 0,\ \|e^{tA}.v\| \leqslant Ce^{-\lambda_s t}\|v\|,\ \|e^{-tA}.v\| \geqslant Ce^{\lambda_s t}\|v\|$
- $\forall v \in \Gamma_u(A),\ \forall t > 0,\ \|e^{-tA}.v\| \leqslant Ce^{-\lambda_u t}\|v\|,\ \|e^{tA}.v\| \geqslant Ce^{\lambda_u t}\|v\|$
- $\forall v \in \Gamma_c(A),\ \forall t \in \mathbb{R},\ C^{-1}\|v\| \leqslant \|e^{tA}.v\| \leqslant C(1+|t|)^n\|v\|.$

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.
On dit que 0 est asymptotiquement stable (quand $t \to +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.
On dit que 0 est asymptotiquement stable (quand $t \to +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Théorème (Critère de Routh)

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.
On dit que 0 est asymptotiquement stable (quand $t \to +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Théorème (Critère de Routh)

- *l'origine est asymptotiquement stable (quand $t \to \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives.*

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.
On dit que 0 est asymptotiquement stable (quand $t \to +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Théorème (Critère de Routh)

- *l'origine est asymptotiquement stable (quand $t \to \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives.*
- *l'origine est stable (quand $t \to \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles négatives et celles λ_i qui sont de parties réelles nulles sont telles que pour tout $q \geqslant 1$ $\ker(A - \lambda_i I)^q = \ker(A - \lambda_i I)$ (on dit que A est diagonalisable en λ_i)*

Cas particulier important : $A \in sl(2, \mathbb{R}) := \{M \in M(2, \mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
On a alors pour tout t, $e^{tA} \in SL(2, \mathbb{R}) := \{M \in M(2, \mathbb{R}) : \det M = 1\}$.

Cas particulier important : $A \in sl(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
On a alors pour tout t, $e^{tA} \in SL(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \det M = 1\}$.
Le cas général se ramène facilement à ce cas : si $A \in M(2,\mathbb{R})$,
$\tilde{A} := A - (\mathrm{tr}(A)/2)I \in sl(2,\mathbb{R})$ et $e^{tA} = e^{t(\mathrm{tr}(A)/2)}e^{t\tilde{A}}$.

Cas particulier important : $A \in sl(2, \mathbb{R}) := \{M \in M(2, \mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
On a alors pour tout t, $e^{tA} \in SL(2, \mathbb{R}) := \{M \in M(2, \mathbb{R}) : \det M = 1\}$.
Le cas général se ramène facilement à ce cas : si $A \in M(2, \mathbb{R})$,
$\tilde{A} := A - (\mathrm{tr}(A)/2)I \in sl(2, \mathbb{R})$ et $e^{tA} = e^{t(\mathrm{tr}(A)/2)}e^{t\tilde{A}}$.
Dans la suite on se concentre sur le cas où $A \in sl(2, \mathbb{R})$.

Cas particulier important : $A \in sl(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
On a alors pour tout t, $e^{tA} \in SL(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \det M = 1\}$.
Le cas général se ramène facilement à ce cas : si $A \in M(2,\mathbb{R})$,
$\tilde{A} := A - (\mathrm{tr}(A)/2)I \in sl(2,\mathbb{R})$ et $e^{tA} = e^{t(\mathrm{tr}(A)/2)}e^{t\tilde{A}}$.
Dans la suite on se concentre sur le cas où $A \in sl(2,\mathbb{R})$.
On posera dans la suite $\omega = \sqrt{|\det A|}$.

Si $\det A > 0$:

- deux v.p. imaginaires pures $\pm i\omega$
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$;
- toutes les orbites sont des ellipses parcourues avec la même période : A est elliptique.
- L'origine est stable.
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1}$

Si $\det A < 0$:

- deux v.p. réelles opposées $\pm\omega$;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_s(A) \oplus \Gamma_u(A)$ où $\Gamma_s = \mathbb{R}v_s$, $\Gamma_u = \mathbb{R}v_u$.
- Les orbites sont des hyperboles : A est hyperbolique
- L'origine est instable.
- Il existe $P \in GL(2,\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\omega t} \end{pmatrix} P^{-1}$

Si $\det A = 0$:

- deux v.p. nulles ;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$ mais A est nilpotente d'ordre 2 ou égale à $\pm Id$
- A est dite parabolique
- L'origine est instable si $a \neq 0$ (stable sinon).
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $A = P \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} 1 & ta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

On veut résoudre à présent

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + b(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème (Variation de la constante (I))

On a pour tout t

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

On veut résoudre à présent

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + b(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème (Variation de la constante (I))

On a pour tout t

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Démonstration. En effet si on pose $Y(t) := e^{-tA}X(t)$ on a

$$Y'(t) = -Ae^{-tA}X(t) + e^{-tA}(AX(t) + b(t)) = e^{-tA}b(t).$$

$\square$

Exemples

Résoudre avec $a, b \in]0, \infty[$,

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0.$$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, il est équivalent de résoudre

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

dont les solutions sont

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \qquad X_0 \in \mathbb{R}^2.$$

Pour calculer l'exponentielle de matrice on tente de diagonaliser A. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} -T & 1 - T \\ -b - T & -a \end{pmatrix} = -T^2 + (a + 1 - b)T + b.$$