M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

22-23 septembre 2021

Organisation du cours et ressources

- Les transparents (versions amphi et longues), feuilles de TD et listes d'errata sont disponibles en ligne à `https://perso.u-cergy.fr/~rkrikorian/M1-SD-CYU-21-22.html`
- Evaluation : CCI
- email : raphael.krikorian@cyu.fr

Cours (Raphaël Krikorian) :

- Mercredi 10h15-11h45, Salle E2
- Jeudi 12h-13h30, Salle E3

TD

- Gr1 (Marjolaine Puël) : Mercredi 12h-13h30, Salle E214
- Gr2 (Raphaël Krikorian) : Mercredi 8h30-10h, Salle E2.

Sommaire

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet, résonance paramérique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie. ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire

Plan du cours

Notes de cours

1. Rappels de topologie
2. Rappels d'algèbre linéaire
3. Rappels de calcul différentiel
4. Théorème du point fixe de Picard
5. Inversion locale et fonctions implicites

Sommaire

Rappels de topologie

Pour plus de détails sur cette section consulter Version longue.
(X, d) espace métrique : ensemble X et distance $d : X \times X \to [0, \infty[$: $\forall x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$
(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r :

$$B(x, r) = \{y \in X, \ d(x, y) < r\}.$$

Exemple important : espaces vectoriels normés (EVN).

Intérieur, fermeture

- Ouvert ensemble $U \subset X$ t.q. :

$$\forall x \in U, \ \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset U.$$

- Fermé : complémentaire est ouvert.
- Si $A \subset X$, intérieur de A (noté) $\mathring{A}$: plus grand ouvert de X (pour l'inclusion) inclus dans A.
  On a
  $$\mathring{A} = \{x \in A : \exists r > 0, B(x, r) \subset A\}.$$
  L'ensemble $A \subset X$ est ouvert dans X ssi $\mathring{A} = A$.
- Adhérence (ou fermeture) de A (noté $\overline{A}$) : plus petit fermé de X contenant A.
  On a
  $$\overline{A} = \{x \in X, \ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \ \lim a_n = x\}.$$
  L'ensemble $A \subset X$ est fermé dans X ssi $\overline{A} = A$.

Espaces métriques complets

Si (X, d) est métrique :

- Une suite de Cauchy suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geqslant N$, $d(u_n, u_m) \leqslant \epsilon$.
- Espace métrique (X, d) complet : toute suite de Cauchy converge.
- Espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ Banach : complet.

Espaces métriques complets
Exemples

Exemples

- E est un espace vectoriel dimension finie (sur $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$) : complet pour n'importe laquelle de ses normes (qui sont par ailleurs toutes équivalentes).
- E EVN, U ouvert de E, F Banach :
  $C^0(U, F) := \{f : U \to F \text{continues t.q. } \sup_{x \in U} \|f(x)\| < \infty\}$, muni de norme $\|f\| = \sup_{x \in U} \|f(x)\|$ est un Banach.

Espaces métriques complets
Exemples

- $L_c(E,F)$=ensemble des applications linéaires continues $E \to F$.
- norme d'opérateur $T \in L(E,F)$,

$$\|T\| = \sup_{x \in E-\{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

- $L_c(E,F)$ de Banach si F de Banach
- Norme d'opérateur vérifie : $T, S \in L_c(E,E)$,

$$\|T \circ S\| \leqslant \|T\| \times \|S\|.$$

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X,d) compact : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
- compact $\implies$ fermé et borné ;
  fermé dans un compact (muni de la distance induite) $\implies$ compact.
- Si X, Y espaces métriques, X compact, $f : X \to Y$ est continue $\implies$ $f(X)$ compact (très utile).
- Critère séquentiel :

$$(X,d) \textbf{ compact } \iff \textbf{toute suite admet une sous-suite convergente.}$$

- Une intersection **décroissante** de fermés non-vides dans un compact (X,d) est compacte et **non-vide**.
- En dimension finie $X \subset \mathbb{R}^n$ est compact ssi **fermé et borné**.

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X,d) est connexe ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X,d) connexe $\iff$ toute application continue de X dans un ensemble fini (p. ex. $\{0,1\}$) est constante.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A,d) est connexe.
- L'image d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).
- On dit qu'un ensemble X est connexe par arcs si pour tous $x, y \in X$ il existe $\gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un ensemble connexe par arcs est connexe.
- Un ouvert d'un EVN est connexe par arcs ssi il est connexe.
- Les connexes de $\mathbb{R}$ = les intervalles.

Composantes connexes

- C composante connexe de X : sous-ensemble connexe de X, maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).
- $x \in X$, la composante connexe de x : le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant x = l'union de tous les connexes de X contenant x. Cet ensemble est non vide et est bien connexe.
- {composantes connexes de X} : partition de X ;
  rel. d'éq. $x \sim y \iff x$ et y dans la même c.c. de X.
- U ouvert de $\mathbb{R}^n$: nombre dénombrable de c.c. qui sont des ouverts $\mathbb{R}^n$

Sommaire

Rappels d'algèbre linéaire

- Si $\mathcal{B}$ est une base d'un K-espace vectoriel E on représente un vecteur v de E dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice colonne X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on appelle matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Si X représente v dans $\mathcal{B}$ et X' représente v dans $\mathcal{B}'$ on a $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'$.
- On identifie une application linéaire $f : E \to F$ entre deux K-espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et m et dont on a fixé des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, à une matrice A de $M_{m,n}(K)$ (m lignes et n colonnes).
- Quand on change de bases dans E et F la matrice A représentant f dans ces nouvelles bases est de le forme $P^{-1}AQ$ où P et Q sont les matrices de changement de base dans E et F.

Rappels d'algèbre linéaire

- Quand $E = F$ on parle d'endomorphisme. Quand on représente un endomorphisme par une matrice on choisit $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Après changement de la base $\mathcal{B}_E$ de E la matrice A devient $P^{-1}AP$ où P est la matrice de changement de base.
- On dit que l'endomorphisme f est un automorphisme s'il est inversible : existence de f^{-1} (resp. A) tq $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ (resp. $A^{-1}A = A^{-1}A = I$).
- $A \in M_n(K)$ est inversible $\iff$ $\det A \neq 0$. Si c'est le cas

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \times {}^tCo(A) \qquad ({}^tB = B^T = \text{transposée de } B)$$

où $Co(A)$ est la co-matrice de A c'est-à-dire la matrice $n \times n$ dont le coefficient (i,j) égale $(-1)^{i+j}$ multiplié par le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en éliminant le coefficient A_{ij}.

Rappels d'algèbre linéaire

Déterminant

- Rappels : le déterminant d'une matrice est une forme linéaire alternée des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad-bc)^{-1}\det\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Si $A, B \in M_n(K)$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Le déterminant d'une matrice A dont les colonnes sont les vecteurs colonnes $v_1, \ldots, v_n$ représente le volume (avec un signe) du parallélépipède engendré par $v_1, \ldots, v_n$.
- On a $\det(P^{-1}AP) = \det A$ pour toute matrice P inversible. Le déterminant est donc invariant par changement de base (on peut ainsi définir le déterminant d'un endomorphisme).

Rappels d'algèbre linéaire

Trace

- La trace d'une matrice $A \in M_n(K)$ est la somme $\mathrm{tr}(A)$ de ses éléments diagonaux.
- Pour tout $P \in GL(n, K)$, on a $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$. $\longrightarrow$ permet de définit la trace d'un endomorphisme.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle valeur propre) telle que $AX = \lambda X$.
- Le spectre de A (noté $\mathrm{spec}(A)$,) c'est-à-dire ensemble des v.p. de A, coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A). \qquad \textbf{Polynôme caractéristique}$$

- Pour toute valeur propre λ de A on note E_λ l'espace propre associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda \times I)$.
- Si $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} E_\lambda$ on dit que A est diagonalisable. Il est équivalent de dire qu'il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} est diagonale.
- Les matrices d'une famille de matrices diagonalisables qui commutent sont diagonalisables dans une même base.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Une matrice n'est pas toujours diagonalisable. Exemple typique : les matrices nilpotentes càd matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- **Cayley Hamilton :** Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.
- **Polynôme minimal** : c'est le polynôme unitaire de plus bas degré $\mu_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mu_A(A) = 0$. Il divise tout polynôme qui annule A, en particulier le polynôme caractéristique.
- Si $\chi_A(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (T - \lambda)^{c_\lambda}$, $c_\lambda \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mu_A(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (T - \lambda)^{m_\lambda} \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant m_\lambda \leqslant c_\lambda.$$

- Les espace $\Gamma_\lambda = \ker(A - \lambda)^{m_\lambda}$ s'appellent les espaces caractéristiques de A. Stables par A : $A\Gamma_\lambda \subset \Gamma_\lambda$.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- **Théorème de décomposition des noyaux** : On a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} \Gamma_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} \ker(A - \lambda)^{m_\lambda}.$$

- **Corollaire (Dunford-Schwartz) :** Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\begin{cases} A = S + N \\ SN = NS \end{cases} \quad \text{avec} \quad S \text{ diagonalisable}, \quad N \text{ nilpotente}.$$

En outre S et N sont des polynômes en A.
- **Décomposition de Jordan :** Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs ont des $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ sur la diagonale, des 1 sur la sur-diagonale et des 0 partout ailleurs (si ces blocs sont de taille 1 il n'y a pas de sur-diagonale). Pour tout $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ un tel bloc apparaît.

Rappels d'algèbre linéaire
Diagonalisation, trigonalisation

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable.
- Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable (en base orthonormale).

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S+N$ précédente.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est toujours trigonalisable càd conjuguée à une matrice triangulaire supérieure.
- L'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
- Une famille de matrices qui commutent est trigonalisable dans une même base.

Rappels d'algèbre linéaire
Exponentielle de matrice

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots e^{\lambda_n})$.
- Si A et B commutent $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ mais si elles ne commutent pas, c'est en général faux.
- On a pour tout $P \in GL(n,\mathbb{R})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}.$$

- $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

Sommaire

Rappels de calcul différentiel

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \to F$.

Definition

$f : U \to F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si $\exists$ appl. lin. continue $Df(x_0) : E \to F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0)\cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : dérivée ou l'application linéaire tangente ou encore la différentielle de f en x_0.

Remarques

- $o(\|v\|) = \|v\|\epsilon(v)$ où $\lim_{v\to 0}\epsilon(v) = 0$.
- Si elle existe, une telle application linéaire est unique.
- La continuité de l'appl. lin. $Df(x_0)$ est automatique en dimension finie.

Rappels de calcul différentiel

- L'appl. lin. $Df(x_0)$ continue (i.e $\|Df(x_0).v\|_F \leqslant C.\|v\|_E$) : *$f$ continue* en x_0.
- Si f est dérivable en tout point de U et si l'application $x \mapsto Df(x)$ (de U dans $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme d'opérateurs) est continue on dit que f est C^1.
- Si $x \mapsto Df(x)$ est dérivable sa dérivée est une application continue de E dans $L_c(E,F)$ qu'on note $D^2f(x)$. Elle s'identifie avec une application bilinéaire continue de $E \times E \to F$.
- De la même façon on peut définir par récurrence la notion d'application de classe C^p ; $D^pf(x)$ est par nature une application p-linéaire continue de E^p dans F.

Rappels de calcul différentiel
Dérivées partielles

- $f : E \times F \to G$ t.q. pour $y \in F$ fixé l'application $E \to G$, $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable, on note $D_1f(x,y)$ ou $\partial_x f(x,y)$ sa dérivée en x : dérivée partielle.
- En dimension finie, Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$ est C^1, $Df(x)$ s'identifie avec la matrice jacobienne $Jf(x)$:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n)\right)_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}.$$

- En dim. quelconque si E, F, G EVN, U ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ f est de classe C^1 ssi toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.

Rappels de calcul différentiel
Exemples

- $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^2$;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
- $\det : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ est C^1 ;
  $D\det(A) : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $H \mapsto \mathrm{tr}(Co(A)^T H)$ où $Co(A)^T =$ transposée de la co-matrice de A.
- Exemple en dimension infinie : $\Phi : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
  $\Phi : u \mapsto \int_0^1 K(\cdot, y, u(y))dy$ de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ est C^1 si K est elle-même C^1.

Rappels de calcul différentiel
Quelques propriétés utiles

- Composition $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- Accroissements finis : Si U est un ouvert **convexe**, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.
- Théorème de Schwarz : Si f est p-fois dérivable $D^pf(x)$ est une application p-linéaire symétrique.
- Formules de Taylor (reste intégral) Si U est un ouvert convexe et $f : U \to F$ est de classe C^{p+1} ; alors,

$$f(b) - f(a) - Df(a).(b-a) - \cdots \frac{1}{p!}D^pf(a).((b-a))^p = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} D^{p+1}f(a+t(b-a)).((b-a))^{p+1}dt.$$

- L'espace $C^p(U,F)$ muni de la norme $\|f\|_p = \max_{0\leqslant k\leqslant p} \sup_{x\in U} \|D^kf(x)\|$ est un espace de Banach

Sommaire

Théorème du point fixe de Picard

(A, d_A), (B, d_B) deux espaces métriques.

- $T : A \to B$ est ρ-lipschitzienne ssi $\forall\, x, y \in A$,

$$d_B(T(x), T(y)) \leqslant \rho . d_A(x, y).$$

- Si $A = B$, $T : A \to A$ est ρ-contractante si ρ-lipschitzienne avec $0 \leqslant \rho < 1$.
- Lipschitzienne $\implies$ continue.
  $C^{lip}(A, B)$= l'ensemble des $T : A \to B$ lipschitziennes ;
  $Lip(T)$ la plus petite constante ρ admissible dans la définition précédente.

Rappels : Espaces métriques complets

Si (X, d) est métrique :

- Une suite de Cauchy suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geqslant N$, $d(u_n, u_m) \leqslant \epsilon$.
- Espace métrique (X, d) complet : toute suite de Cauchy converge.
- Espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ Banach : complet.
- $$\left\{ \begin{array}{l} F \subset X \text{ fermé} \\ (X, d) \text{ complet} \end{array} \right. \implies (F, d) \text{ complet.}$$

Théorème du point fixe de Picard

Théorème (du point fixe de Picard)

*(A, d) soit **complet**, $T : A \to A$, ρ-contractante $(0 \leqslant \rho < 1)$. Alors*

- ***T admet un unique point fixe** $x \in A$ (i.e. $T(x) = x$).*
- *Pour tout $x_0 \in A$ la suite $T^i(x_0)$ converge vers x.*

Remarque : mêmes conclusions s'il existe n t.q. T^n contractante :

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- **Existence** : Si $y \in A$,
  $d(T^{n+1}(y), T^n(y)) \leqslant \rho d(T^n(y), T^{n-1}(y)) \leqslant \rho^n d(T(y), y)$.
- Donc par l'inégalité triangulaire et en sommant de n à $n+p-1$,

$$d(T^{n+p}(y), T^n(y)) \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} d(T^{n+k-1}(y), T^{n+k}(y)) \leqslant (\sum_{k=0}^{p-1} \rho^{n+k}) d(T(y), y)$$

$$\leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho} d(T(y), y).$$

- La suite $T^n(y)$ est par conséquent de Cauchy et ainsi converge vers un x : $T^n(y) \to x$
- Comme $T^n(y) \to x$ on a aussi $T^{n+1}(y) \to x$ et donc

$$T(T^n(x)) = T^{n+1}(x) \implies T(x) = x.$$

Théorème du point fixe de Picard

- **Unicité** : si $T(y) = y$ et $T(y') = y'$ alors

$$d(y, y') = d(T(y), T(y')) \leqslant \rho d(y, y')$$

et comme $0 \leqslant \rho < 1$ on a $d(y, y') = 0$. $\implies$ $y = y'$.

□

Théorème du point fixe de Picard

Versions à paramètres

Remarque importante pour la suite : Il existe des versions à paramètres du théorème de Picard (qu'il faut connaître).

- Version C^0 et Lipschitz. : (A, d) complet, Λ espace métrique

$$\begin{cases} T = T_\lambda \text{ dépend } C^0 \text{ ou Lipschitz d'un paramètre } \lambda \in \Lambda \\ \forall \lambda \in \Lambda,\ T_\lambda(\cdot) \text{ est } \rho\text{-contractante } (\rho < 1) \end{cases}$$

$\implies$ le point fixe $x(\lambda)$ dépend C^0 ou Lipschitz de λ.

Théorème du point fixe de Picard

Versions à paramètres

- Version C^k. : A fermé d'un Banach E, U ouvert de E t.q. $A \subset U$, Λ est un ouvert d'un EVN,

$$\begin{cases} \forall\, \lambda \in \Lambda, \quad T_\lambda : A \to A \\ \forall \lambda \in \Lambda,\ T_\lambda(\cdot) \text{ est } \rho\text{-contractante } (\rho < 1) \\ f\ C^k \text{ par rapport à } (x, \lambda) \in U \times \Lambda \\ \forall (x, \lambda) \in U \times \Lambda,\ \|D_x T(x, \lambda)\| \leqslant \rho < 1 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x(\lambda) \text{ dépend } C^k \text{ de } \lambda \text{ et} \\ Dx(\lambda) = -(D_x T(x(\lambda), \lambda) - Id)^{-1} D_\lambda T(x(\lambda), \lambda). \end{cases}$$

Théorème du point fixe de Picard

Théorème de Picard à paramètre, version C^0 et lipschitz

Théorème (Picard à paramètre (version C^0 et lipschitz))

Soient (A, d) un espace métrique complet, Λ un espace métrique (topologique suffit) et $0 \leqslant \rho < 1$. Soit $T : A \times \Lambda \to A$ telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $T(\cdot, \lambda) : A \to A$ soit ρ-contractante. Alors, si T est continue, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot, \lambda)$ et l'application $x(\cdot) : \Lambda \to A$ est continue ; si en outre pour tout $x \in A$ fixé l'application $T(x, \cdot) : \Lambda \to A$ est C-lipschitzienne, l'application $x : \Lambda \to A$ est $C/(1-\rho)$-lipschitzienne.

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.
Cas C^0.

On applique le Théorème de Picard à $\mathcal{T} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ où $\mathcal{A} = C^0(\Lambda, A)$ muni de la norme du sup ($\|x\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \|x(\lambda)\|$) et $\mathcal{T}(x(\cdot)) = T(x(\cdot), \cdot)$ qui est bien ρ-contractante. □

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.
Cas *Lipschitz*.

Notons $x(\lambda)$ le point fixe de $T(\cdot, \lambda)$ et écrivons $T(x(\mu), \mu) - T(x(\lambda), \lambda) = T(x(\mu), \mu) - T(x(\lambda), \mu) + T(x(\lambda), \mu) - T(x(\lambda), \lambda)$. En utilisant l'inégalité triangulaire et le caractère ρ et C-lipschitzien de $T(\cdot, \mu)$ et $T(x(\lambda), \cdot)$ on obtient

$$\|x(\mu) - x(\lambda)\| \leqslant C\|\mu - \lambda\| + \rho\|x(\mu) - x(\lambda)\|$$

ce qui donne le résultat. □

Théorème du point fixe de Picard

Théorème de Picard à paramètre (version C^k)

Théorème (Picard à paramètre, version C^k)

Soient $A \subset U \subset E$, U ouvert et A fermé du Banach E, $\Lambda \subset F$, Λ ouvert de l'EVN F ; soit en outre $0 \leqslant \rho < 1$. Supposons que $T : U \times \Lambda \to E$ soit de classe C^k ($k \geqslant 1$), envoie $A \times \Lambda$ dans A et que : (a) pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $T(\cdot, \lambda) : A \to A$ est ρ-contractante et : (b) pour tout $(x, \lambda) \in U \times \Lambda$ on a $\|D_x T(x, \lambda)\| \leqslant \rho$. Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot, \lambda)$ et l'application $x(\cdot) : \Lambda \to A$ est C^k et on a

$$Dx(\lambda) = -(D_x T(x(\lambda), \lambda) - Id)^{-1} D_\lambda T(x(\lambda), \lambda).$$

Théorème du point fixe de Picard
Théorème de Picard à paramètre (version C^k)

Remarque :

- La condition (b) n'implique (a) (condition globale) que si U est convexe.
- On peut remplacer la condition (a) par : pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot, \lambda)$ et l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.
- La condition $\|D_x T(\cdot, \lambda)\| \leqslant \rho < 1$ implique que $Id - D_x T(x, \lambda)$ est inversible pour $x \in A$.

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- Notons $x(\lambda)$ le point fixe associé à $T(\cdot, \lambda)$ (existence garantit par la condition (a)) ; par la version lipschitzienne de Picard, on sait que $x : \Lambda \to A$ est lipschitzienne (au moins au voisinage d'un point $\lambda_0 \in \Lambda$ choisi à l'avance).
- Si on pose $\Delta x(\lambda, \Delta\lambda) = x(\lambda + \Delta\lambda) - x(\lambda)$, on a donc $\|\Delta x(\lambda, \Delta\lambda)\| \leqslant C\|\Delta\lambda\|$.
- Comme $x(\lambda) = T(x(\lambda), \lambda)$ et $x(\lambda + \Delta\lambda) = T(x(\lambda + \Delta\lambda), \lambda + \Delta\lambda)$

$$\Delta x(\lambda, \Delta\lambda) = D_1 T(x(\lambda), \lambda)\Delta x(\lambda, \Delta\lambda) + D_2 T(x(\lambda), \lambda)\Delta\lambda + o(\Delta\lambda).$$

Théorème du point fixe de Picard

- En itérant l'inégalité précédente on obtient

$$\Delta x(\lambda, \Delta\lambda) = (D_1 T(x(\lambda), \lambda)^n \Delta x(\lambda, \Delta\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} (D_1 T(x(\lambda), \lambda))^k D_2 T(x(\lambda), \lambda)\Delta\lambda + o_n(\Delta\lambda). \quad (1)$$

(Remarquer que le petit o dépend aussi de n).

- Soit $\epsilon > 0$ et choisissons n tel que pour λ dans un voisinage de λ_0, on ait $\rho^n \max(C, (1-\rho)^{-1}\|D_2 T(x(\lambda), \lambda)\|) < \epsilon/3$
- Si on note $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (D_1 T(x(\lambda), \lambda))^k D_2 T(x(\lambda), \lambda) \in L_c(F, E)$ (existe car $\rho < 1$) on a $\|\Delta x(\lambda, \Delta\lambda) - L(\lambda)\Delta\lambda\| \leqslant (2\epsilon/3)\|\Delta\lambda\| + o_n(\Delta\lambda)$. Donc pour $\Delta\lambda$ suffisamment petit $\|x(\lambda + \Delta\lambda) - x(\lambda) - L(\lambda)\Delta\lambda\| \leqslant \epsilon\|\lambda\|$.

Théorème du point fixe de Picard

- Cela démontre que $x(\cdot)$ est dérivable en λ et que $Dx(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (D_1 T(x(\lambda), \lambda))^k D_2 T(x(\lambda)).$
- Cette série est normalement convergente donc $Dx(\cdot)$ est continue (observer que $D_1 T(x(\lambda), \lambda)$,$D_2 T(x(\lambda), \lambda)$ sont continues en λ).
- La relation $Dx(\lambda) = -(D_1 T(x(\lambda), \lambda) - Id)^{-1} D_2 T(x(\lambda), \lambda)$ (obtenue en dérivant $x(\lambda) = T(x(\lambda), \lambda)$) montre par récurrence que $x(\cdot)$ est C^k si T est C^k. □

Sommaire

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \to F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

$$\left\{\begin{array}{l} E, F \textit{ deux espaces de Banach}, x_0 \in E \\ f : (E, x_0) \to F \textit{ de classe } C^k \ (k \geqslant 1) \textit{ t.q. } f(x_0) = y_0 \in F \\ Df(x_0) \in L_c(E, F) \textit{ inversible (et son inverse est donc continu)} \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$ *f est un difféomorphisme local de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0*

Preuve.– On suppose $x_0 = y_0 = 0$. On applique Picard à paramètre à $T_y(x) := Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1}.f(x))$ (y est le paramètre) :

$$T_y(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Inversion locale

Il faut donc vérifier que si y est suffisamment petit

$$T_y : x \mapsto Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1} \cdot f(x))$$

1. Envoie une boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$ dans elle-même pour un $\delta > 0$.
2. Est bien contractante sur cette boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$.

Or

$$DT_y(\cdot) = id - Df(0)^{-1}Df(\cdot) \implies \|DT_y\| \leqslant \varepsilon(\delta), \quad \lim_{\delta \to 0} \varepsilon = 0.$$

donc par les accroissements finis si δ et $\|y\| \ll 1$, $x \in \overline{B(0, \delta)}$

1. $\|T_y(x)\| \leqslant \|Df(0)^{-1}\| \cdot \|y\| + \varepsilon(\delta)\|x\| \leqslant 2\delta\varepsilon(\delta) \leqslant \delta$
2. $\|T_y(x) - T_y(x')\| \leqslant \varepsilon(\delta)\|x - x'\| \leqslant (1/2)\|x - x'\|$.

□

Inversion locale

Exemples

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (2x + y + y^3, x + y + x^5)$; $\exists \epsilon > 0$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $|u|^2 + |v|^2 \leqslant \epsilon$, $\exists (x, y) \in Vois(0, 0)$, t.q. $f(x, y) = (u, v)$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée ; l'équation $f(x + 1) + \sin(f(x)^2) = g(x)$ admet une solution f continue bornée pourvu que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$ soit suffisamment petit.

Fonctions implicites

Théorème (des fonctions implicites)

$$\begin{cases} E, F \text{ Banach}, \ (x_0, \lambda_0) \in E \times F \text{ t.q. } f(x_0, \lambda_0) = 0 \\ f : (E \times F, (x_0, \lambda_0)) \to E \text{ classe } C^k \ (k \geqslant 1) \\ D_x f(x_0, \lambda_0) \in L_c(E, E) \text{ inversible} \end{cases}$$

$\implies \exists$ *voisinage* $W = U \times V$ *de* (x_0, λ_0) *t.q.*

$$\{(x, \lambda) \in W : f(x, \lambda) = 0\} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in V\}$$

où $\lambda \mapsto x(\lambda)$ *est* C^k.
On a alors $\partial_\lambda x = -(D_x f(x, \lambda))^{-1} \circ D_\lambda f$.

Démonstration. Théo. d'inversion locale appliqué à $\phi(x, \lambda) = (f(x, \lambda), \lambda)$ définie sur un voisinage de $(E \times F, (x_0, \lambda_0)) \to E \times F$. □

Fonctions implicites
Exemples

L'ensemble $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^5 + xy - 1 = 0\}$ contient un graphe $(x, y(x))$, $-\epsilon < x < \epsilon$ pour ϵ assez petit.