

M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

22-23 septembre 2021

- Les transparents (versions amphi et longues), feuilles de TD et listes d'errata sont disponibles en ligne à <https://perso.u-cergy.fr/~rkrikorian/M1-SD-CYU-21-22.html>
- Evaluation : CCI
- email : raphael.krikorian@cyu.fr

Cours (Raphaël Krikorian) :

- Mercredi 10h15-11h45, Salle E2
- Jeudi 12h-13h30, Salle E3

TD

- Gr1 (Marjolaine Puël) : Mercredi 12h-13h30, Salle E214
- Gr2 (Raphaël Krikorian) : Mercredi 8h30-10h, Salle E2.

- 1 Plan M1-SD
- 2 Plan du cours
- 3 Rappels de topologie
- 4 Rappels d'algèbre linéaire
- 5 Rappels de calcul différentiel
- 6 Théorème du point fixe de Picard
- 7 Inversion locale et fonctions implicites

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet, résonance paramétrique.

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet, résonance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie. ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

- 1 Plan M1-SD
- 2 Plan du cours**
- 3 Rappels de topologie
- 4 Rappels d'algèbre linéaire
- 5 Rappels de calcul différentiel
- 6 Théorème du point fixe de Picard
- 7 Inversion locale et fonctions implicites

Notes de cours

- 1 Rappels de topologie
- 2 Rappels d'algèbre linéaire
- 3 Rappels de calcul différentiel
- 4 Théorème du point fixe de Picard
- 5 Inversion locale et fonctions implicites

- 1 Plan M1-SD
- 2 Plan du cours
- 3 Rappels de topologie**
- 4 Rappels d'algèbre linéaire
- 5 Rappels de calcul différentiel
- 6 Théorème du point fixe de Picard
- 7 Inversion locale et fonctions implicites

Rappels de topologie

Pour plus de détails sur cette section consulter [Version longue](#).

Pour plus de détails sur cette section consulter Version longue.

(X, d) **espace métrique** : ensemble X et distance $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$:

$\forall x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Pour plus de détails sur cette section consulter Version longue.

(X, d) **espace métrique** : ensemble X et distance $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$:

$\forall x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r :

Pour plus de détails sur cette section consulter Version longue.

(X, d) **espace métrique** : ensemble X et distance $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$:

$\forall x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r :

$$B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\}.$$

Pour plus de détails sur cette section consulter [Version longue](#).

(X, d) **espace métrique** : ensemble X et distance $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$:

$\forall x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r :

$$B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\}.$$

Exemple important : espaces vectoriels normés (EVN).

Intérieur, fermeture

- **Ouvert** ensemble $U \subset X$ t.q. :

$$\forall x \in U, \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset U.$$

- **Ouvert** ensemble $U \subset X$ t.q. :

$$\forall x \in U, \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset U.$$

- **Fermé** : complémentaire est ouvert.

- **Ouvert** ensemble $U \subset X$ t.q. :

$$\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U.$$

- **Fermé** : complémentaire est ouvert.
- Si $A \subset X$, **intérieur** de A (noté $\overset{\circ}{A}$) : **plus grand ouvert** de X (pour l'inclusion) inclus dans A .

On a

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A : \exists r > 0, B(x, r) \subset A\}.$$

L'ensemble $A \subset X$ est ouvert dans X ssi $\overset{\circ}{A} = A$.

- **Ouvert** ensemble $U \subset X$ t.q. :

$$\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U.$$

- **Fermé** : complémentaire est ouvert.
- Si $A \subset X$, **intérieur** de A (noté \mathring{A}) : **plus grand ouvert** de X (pour l'inclusion) inclus dans A .

On a

$$\mathring{A} = \{x \in A : \exists r > 0, B(x, r) \subset A\}.$$

L'ensemble $A \subset X$ est ouvert dans X ssi $\mathring{A} = A$.

- **Adhérence** (ou fermeture) de A (noté \overline{A}) : **plus petit fermé** de X contenant A .

On a

$$\overline{A} = \{x \in X, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim a_n = x\}.$$

L'ensemble $A \subset X$ est fermé dans X ssi $\overline{A} = A$.

Si (X, d) est métrique :

Si (X, d) est métrique :

- Une **suite de Cauchy** suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geq N, d(u_n, u_m) \leq \epsilon$.

Si (X, d) est métrique :

- Une **suite de Cauchy** suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geq N, d(u_n, u_m) \leq \epsilon$.
- Espace métrique (X, d) **complet** : toute suite de Cauchy converge.

Si (X, d) est métrique :

- Une **suite de Cauchy** suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geq N, d(u_n, u_m) \leq \epsilon$.
- Espace métrique (X, d) **complet** : toute suite de Cauchy converge.
- Espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ **Banach** : complet.

Exemples

- E est un espace vectoriel dimension finie (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) : complet pour n'importe laquelle de ses normes (qui sont par ailleurs toutes équivalentes).

Exemples

- E est un espace vectoriel dimension finie (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) : complet pour n'importe laquelle de ses normes (qui sont par ailleurs toutes équivalentes).
- E EVN, U ouvert de E , F Banach :
 $C^0(U, F) := \{f : U \rightarrow F \text{ continues t.q. } \sup_{x \in U} \|f(x)\| < \infty\}$, muni de norme $\|f\| = \sup_{x \in U} \|f(x)\|$ est un Banach.

Espaces métriques complets

Exemples

Espaces métriques complets

Exemples

- $L_c(E, F)$ = ensemble des applications linéaires continues $E \rightarrow F$.

Espaces métriques complets

Exemples

- $L_c(E, F)$ = ensemble des applications linéaires continues $E \rightarrow F$.
- **norme d'opérateur** $T \in L(E, F)$,

$$\|T\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Espaces métriques complets

Exemples

- $L_c(E, F)$ = ensemble des applications linéaires continues $E \rightarrow F$.
- norme d'opérateur $T \in L(E, F)$,

$$\|T\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

- $L_c(E, F)$ de Banach si F de Banach

Espaces métriques complets

Exemples

- $L_c(E, F)$ = ensemble des applications linéaires continues $E \rightarrow F$.
- norme d'opérateur $T \in L(E, F)$,

$$\|T\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

- $L_c(E, F)$ de Banach si F de Banach
- Norme d'opérateur vérifie : $T, S \in L_c(E, E)$,

$$\|T \circ S\| \leq \|T\| \times \|S\|.$$

Espaces métriques compacts

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) **compact** : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) **compact** : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
- compact \implies fermé et borné ;
fermé dans un compact (muni de la distance induite) \implies compact.

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) **compact** : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
- compact \implies fermé et borné ;
fermé dans un compact (muni de la distance induite) \implies compact.
- Si X, Y espaces métriques, X compact, $f : X \rightarrow Y$ est continue $\implies f(X)$ compact (très utile).

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) **compact** : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
- compact \implies fermé et borné ;
fermé dans un compact (muni de la distance induite) \implies compact.
- Si X, Y espaces métriques, X compact, $f : X \rightarrow Y$ est continue $\implies f(X)$ compact (très utile).
- **Critère séquentiel** :

(X, d) compact \iff

toute suite admet une sous-suite convergente.

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) **compact** : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
- compact \implies fermé et borné ;
fermé dans un compact (muni de la distance induite) \implies compact.
- Si X, Y espaces métriques, X compact, $f : X \rightarrow Y$ est continue $\implies f(X)$ compact (très utile).
- **Critère séquentiel** :

(X, d) compact \iff

toute suite admet une sous-suite convergente.

- Une intersection **décroissante** de fermés non-vides dans un compact (X, d) est compacte et **non-vide**.

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) **compact** : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
- compact \implies fermé et borné ;
fermé dans un compact (muni de la distance induite) \implies compact.
- Si X, Y espaces métriques, X compact, $f : X \rightarrow Y$ est continue $\implies f(X)$ compact (très utile).
- **Critère séquentiel** :

(X, d) compact \iff

toute suite admet une sous-suite convergente.

- Une intersection **décroissante** de fermés non-vides dans un compact (X, d) est compacte et **non-vide**.
- En **dimension finie** $X \subset \mathbb{R}^n$ est compact ssi **fermé et borné**.

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X, d) est **connexe** ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.

- Un espace métrique (X, d) est **connexe** ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe \iff toute application continue de X dans un ensemble **fini** (p. ex. $\{0, 1\}$) est **constante**.

- Un espace métrique (X, d) est **connexe** ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe \iff toute application continue de X dans un ensemble **fini** (p. ex. $\{0, 1\}$) est **constante**.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A, d) est connexe.

- Un espace métrique (X, d) est **connexe** ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe \iff toute application continue de X dans un ensemble **fini** (p. ex. $\{0, 1\}$) est **constante**.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A, d) est connexe.
- **L'image** d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).

- Un espace métrique (X, d) est **connexe** ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe \iff toute application continue de X dans un ensemble **fini** (p. ex. $\{0, 1\}$) est **constante**.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A, d) est connexe.
- **L'image** d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).
- On dit qu'un ensemble X est **connexe par arcs** si pour tous $x, y \in X$ il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un ensemble connexe par arcs est connexe.

- Un espace métrique (X, d) est **connexe** ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe \iff toute application continue de X dans un ensemble **fini** (p. ex. $\{0, 1\}$) est **constante**.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A, d) est connexe.
- **L'image** d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).
- On dit qu'un ensemble X est **connexe par arcs** si pour tous $x, y \in X$ il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un ensemble connexe par arcs est connexe.
- Un ouvert d'un EVN est connexe par arcs ssi il est connexe.

- Un espace métrique (X, d) est **connexe** ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe \iff toute application continue de X dans un ensemble **fini** (p. ex. $\{0, 1\}$) est **constante**.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A, d) est connexe.
- **L'image** d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).
- On dit qu'un ensemble X est **connexe par arcs** si pour tous $x, y \in X$ il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un ensemble connexe par arcs est connexe.
- Un ouvert d'un EVN est connexe par arcs ssi il est connexe.
- Les connexes de \mathbb{R} = les intervalles.

Composantes connexes

- C **composante connexe** de X : sous-ensemble connexe de X , maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).

- C **composante connexe** de X : sous-ensemble connexe de X , maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).
- $x \in X$, la composante connexe de x : le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant $x =$ l'union de tous les connexes de X contenant x . Cet ensemble est non vide et est bien connexe.

- C **composante connexe** de X : sous-ensemble connexe de X , maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).
- $x \in X$, la composante connexe de x : le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant $x =$ l'union de tous les connexes de X contenant x . Cet ensemble est non vide et est bien connexe.
- $\{\text{composantes connexes de } X\}$: partition de X ;
rel. d'éq. $x \sim y \iff x$ et y dans la même c.c. de X .

- C **composante connexe** de X : sous-ensemble connexe de X , maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).
- $x \in X$, la composante connexe de x : le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant $x =$ l'union de tous les connexes de X contenant x . Cet ensemble est non vide et est bien connexe.
- $\{\text{composantes connexes de } X\}$: partition de X ;
rel. d'éq. $x \sim y \iff x$ et y dans la même c.c. de X .
- U ouvert de \mathbb{R}^n : nombre dénombrable de c.c. qui sont des ouverts \mathbb{R}^n

- 1 Plan M1-SD
- 2 Plan du cours
- 3 Rappels de topologie
- 4 Rappels d'algèbre linéaire**
- 5 Rappels de calcul différentiel
- 6 Théorème du point fixe de Picard
- 7 Inversion locale et fonctions implicites

Rappels d'algèbre linéaire

- Si \mathcal{B} est une base d'un K -espace vectoriel E on représente un **vecteur** v de E dans la base \mathcal{B} par une **matrice colonne** X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans \mathcal{B} .

Rappels d'algèbre linéaire

- Si \mathcal{B} est une base d'un K -espace vectoriel E on représente un **vecteur** v de E dans la base \mathcal{B} par une **matrice colonne** X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans \mathcal{B} .
- Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E , on appelle **matrice de changement de base** de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .

- Si \mathcal{B} est une base d'un K -espace vectoriel E on représente un **vecteur** v de E dans la base \mathcal{B} par une **matrice colonne** X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans \mathcal{B} .
- Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E , on appelle **matrice de changement de base** de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .
- Si X représente v dans \mathcal{B} et X' représente v dans \mathcal{B}' on a $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'$.

- Si \mathcal{B} est une base d'un K -espace vectoriel E on représente un **vecteur** v de E dans la base \mathcal{B} par une **matrice colonne** X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans \mathcal{B} .
- Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E , on appelle **matrice de changement de base** de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .
- Si X représente v dans \mathcal{B} et X' représente v dans \mathcal{B}' on a $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'$.
- On identifie une **application linéaire** $f : E \rightarrow F$ entre deux K -espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et m et dont on a fixé des bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F , à une **matrice** A de $M_{m,n}(K)$ (m lignes et n colonnes).

- Si \mathcal{B} est une base d'un K -espace vectoriel E on représente un **vecteur** v de E dans la base \mathcal{B} par une **matrice colonne** X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans \mathcal{B} .
- Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E , on appelle **matrice de changement de base** de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .
- Si X représente v dans \mathcal{B} et X' représente v dans \mathcal{B}' on a $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'$.
- On identifie une **application linéaire** $f : E \rightarrow F$ entre deux K -espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et m et dont on a fixé des bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F , à une **matrice** A de $M_{m,n}(K)$ (m lignes et n colonnes).
- Quand on change de bases dans E et F la matrice A représentant f dans ces nouvelles bases est de la forme $P^{-1}AQ$ où P et Q sont les matrices de changement de base dans E et F .

- Quand $E = F$ on parle d'**endomorphisme**. Quand on représente un endomorphisme par une matrice on choisit $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Après changement de la base \mathcal{B}_E de E la matrice A devient $P^{-1}AP$ où P est la matrice de changement de base.

- Quand $E = F$ on parle d'**endomorphisme**. Quand on représente un endomorphisme par une matrice on choisit $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Après changement de la base \mathcal{B}_E de E la matrice A devient $P^{-1}AP$ où P est la matrice de changement de base.
- On dit que l'endomorphisme f est un **automorphisme** s'il est inversible : existence de f^{-1} (resp. A) tq $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ (resp. $A^{-1}A = A^{-1}A = I$).

- Quand $E = F$ on parle d'**endomorphisme**. Quand on représente un endomorphisme par une matrice on choisit $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Après changement de la base \mathcal{B}_E de E la matrice A devient $P^{-1}AP$ où P est la matrice de changement de base.
- On dit que l'endomorphisme f est un **automorphisme** s'il est inversible : existence de f^{-1} (resp. A) tq $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ (resp. $A^{-1}A = A^{-1}A = I$).
- $A \in M_n(K)$ est inversible $\iff \det A \neq 0$. Si c'est le cas

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \times {}^tCo(A) \quad ({}^tB = B^T = \text{transposée de } B)$$

où $Co(A)$ est la **co-matrice** de A c'est-à-dire la matrice $n \times n$ dont le coefficient (i, j) égale $(-1)^{i+j}$ multiplié par le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en éliminant le coefficient A_{ij} .

Rappels d'algèbre linéaire

Déterminant

- Rappels : le **déterminant** d'une matrice est une **forme linéaire alternée** des colonnes de la matrice.

Rappels d'algèbre linéaire

Déterminant

- Rappels : le **déterminant** d'une matrice est une **forme linéaire alternée** des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.

Rappels d'algèbre linéaire

Déterminant

- Rappels : le **déterminant** d'une matrice est une **forme linéaire alternée** des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \det \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Rappels d'algèbre linéaire

Déterminant

- Rappels : le **déterminant** d'une matrice est une **forme linéaire alternée** des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \det \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Si $A, B \in M_n(K)$, on a **$\det(AB) = \det(A) \det(B)$** .

Rappels d'algèbre linéaire

Déterminant

- Rappels : le **déterminant** d'une matrice est une **forme linéaire alternée** des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \det \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Si $A, B \in M_n(K)$, on a **$\det(AB) = \det(A) \det(B)$** .
- Le déterminant d'une matrice A dont les colonnes sont les vecteurs colonnes v_1, \dots, v_n représente le **volume** (avec un signe) du parallélépipède engendré par v_1, \dots, v_n .

Rappels d'algèbre linéaire

Déterminant

- Rappels : le **déterminant** d'une matrice est une **forme linéaire alternée** des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \det \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Si $A, B \in M_n(K)$, on a **$\det(AB) = \det(A) \det(B)$** .
- Le déterminant d'une matrice A dont les colonnes sont les vecteurs colonnes v_1, \dots, v_n représente le **volume** (avec un signe) du parallélépipède engendré par v_1, \dots, v_n .
- On a $\det(P^{-1}AP) = \det A$ pour toute matrice P inversible. Le déterminant est donc **invariant par changement de base** (on peut ainsi définir le déterminant d'un endomorphisme).

- La trace d'une matrice $A \in M_n(K)$ est la somme $\text{tr}(A)$ de ses éléments diagonaux.

- La trace d'une matrice $A \in M_n(K)$ est la somme $\text{tr}(A)$ de ses éléments diagonaux.
- Pour tout $P \in GL(n, K)$, on a $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$. \rightarrow permet de définir la trace d'un endomorphisme.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un **vecteur propre** de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle **valeur propre**) telle que $AX = \lambda X$.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un **vecteur propre** de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle **valeur propre**) telle que $AX = \lambda X$.
- Le **spectre** de A (noté $\text{spec}(A)$), c'est-à-dire ensemble des v.p. de A , coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A). \quad \text{Polynôme caractéristique}$$

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un **vecteur propre** de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle **valeur propre**) telle que $AX = \lambda X$.
- Le **spectre** de A (noté $\text{spec}(A)$), c'est-à-dire ensemble des v.p. de A , coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A). \quad \text{Polynôme caractéristique}$$

- Pour toute valeur propre λ de A on note E_λ l'**espace propre** associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda \times I)$.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un **vecteur propre** de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle **valeur propre**) telle que $AX = \lambda X$.
- Le **spectre** de A (noté $\text{spec}(A)$), c'est-à-dire ensemble des v.p. de A , coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A). \quad \text{Polynôme caractéristique}$$

- Pour toute valeur propre λ de A on note E_λ l'**espace propre** associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda \times I)$.
- Si $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} E_\lambda$ on dit que A est **diagonalisable**. Il est équivalent de dire qu'il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} est **diagonale**.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un **vecteur propre** de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle **valeur propre**) telle que $AX = \lambda X$.
- Le **spectre** de A (noté $\text{spec}(A)$), c'est-à-dire ensemble des v.p. de A , coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A). \quad \text{Polynôme caractéristique}$$

- Pour toute valeur propre λ de A on note E_λ l'**espace propre** associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda \times I)$.
- Si $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} E_\lambda$ on dit que A est **diagonalisable**. Il est équivalent de dire qu'il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} est **diagonale**.
- Les matrices d'une famille de matrices diagonalisables qui **commutent** sont **diagonalisables dans une même base**.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Une matrice n'est **pas toujours** diagonalisable. Exemple typique : les matrices **nilpotentes** c'ad matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Une matrice n'est **pas toujours** diagonalisable. Exemple typique : les matrices **nilpotentes** c-à-d matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Une matrice n'est **pas toujours** diagonalisable. Exemple typique : les matrices **nilpotentes** c'ad matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- **Cayley Hamilton** : Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Une matrice n'est **pas toujours** diagonalisable. Exemple typique : les matrices **nilpotentes** c'est-à-dire matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- **Cayley Hamilton** : Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.
- **Polynôme minimal** : c'est le polynôme unitaire de plus bas degré $\mu_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mu_A(A) = 0$. Il divise tout polynôme qui annule A , en particulier le polynôme caractéristique.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Une matrice n'est **pas toujours** diagonalisable. Exemple typique : les matrices **nilpotentes** c'ad matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- **Cayley Hamilton** : Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.
- **Polynôme minimal** : c'est le polynôme unitaire de plus bas degré $\mu_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mu_A(A) = 0$. Il divise tout polynôme qui annule A , en particulier le polynôme caractéristique.
- Si $\chi_A(T) = \prod_{\lambda \in \text{spec}(A)} (T - \lambda)^{c_\lambda}$, $c_\lambda \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mu_A(T) = \prod_{\lambda \in \text{spec}(A)} (T - \lambda)^{m_\lambda} \quad \text{avec} \quad 1 \leq m_\lambda \leq c_\lambda.$$

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction de endomorphismes

- Une matrice n'est **pas toujours** diagonalisable. Exemple typique : les matrices **nilpotentes** c'ad matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- **Cayley Hamilton** : Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.
- **Polynôme minimal** : c'est le polynôme unitaire de plus bas degré $\mu_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mu_A(A) = 0$. Il divise tout polynôme qui annule A , en particulier le polynôme caractéristique.
- Si $\chi_A(T) = \prod_{\lambda \in \text{spec}(A)} (T - \lambda)^{c_\lambda}$, $c_\lambda \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mu_A(T) = \prod_{\lambda \in \text{spec}(A)} (T - \lambda)^{m_\lambda} \quad \text{avec} \quad 1 \leq m_\lambda \leq c_\lambda.$$

- Les espace $\Gamma_\lambda = \ker(A - \lambda)^{m_\lambda}$ s'appellent les **espaces caractéristiques** de A . **Stables par A : $A\Gamma_\lambda \subset \Gamma_\lambda$.**

- **Théorème de décomposition des noyaux** : On a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} \Gamma_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} \ker(A - \lambda)^{m_\lambda}.$$

- **Théorème de décomposition des noyaux** : On a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} \Gamma_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} \ker(A - \lambda)^{m_\lambda}.$$

- **Corollaire (Dunford-Schwartz)** : Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\begin{cases} A = S + N \\ SN = NS \end{cases} \quad \text{avec } S \text{ diagonalisable, } N \text{ nilpotente.}$$

En outre S et N sont des polynômes en A .

- **Théorème de décomposition des noyaux** : On a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} \Gamma_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} \ker(A - \lambda)^{m_\lambda}.$$

- **Corollaire (Dunford-Schwartz)** : Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\begin{cases} A = S + N \\ SN = NS \end{cases} \quad \text{avec } S \text{ diagonalisable, } N \text{ nilpotente.}$$

En outre S et N sont des **polynômes** en A .

- **Décomposition de Jordan** : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs ont des $\lambda \in \text{spec}(A)$ sur la diagonale, des 1 sur la sur-diagonale et des 0 partout ailleurs (si ces blocs sont de taille 1 il n'y a pas de sur-diagonale). Pour tout $\lambda \in \text{spec}(A)$ un tel bloc apparaît.

Rappels d'algèbre linéaire

Diagonalisation, trigonalisation

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme **scindé à racines simples** est diagonalisable.

Rappels d'algèbre linéaire

Diagonalisation, trigonalisation

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme **scindé à racines simples** est diagonalisable.
- Une matrice **symétrique** réelle est toujours **diagonalisable** (en base orthonormale).

Rappels d'algèbre linéaire

Diagonalisation, trigonalisation

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme **scindé à racines simples** est diagonalisable.
- Une matrice **symétrique** réelle est toujours **diagonalisable (en base orthonormale)**.

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S + N$ précédente.

Rappels d'algèbre linéaire

Diagonalisation, trigonalisation

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme **scindé à racines simples** est diagonalisable.
- Une matrice **symétrique** réelle est toujours **diagonalisable (en base orthonormale)**.

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S + N$ précédente.

- **Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est toujours trigonalisable** càd conjuguée à une matrice triangulaire supérieure.

Rappels d'algèbre linéaire

Diagonalisation, trigonalisation

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme **scindé à racines simples** est diagonalisable.
- Une matrice **symétrique** réelle est toujours **diagonalisable (en base orthonormale)**.

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S + N$ précédente.

- **Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est toujours trigonalisable** càd conjuguée à une matrice triangulaire supérieure.
- L'ensemble des matrices diagonalisables sur \mathbb{C} est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Rappels d'algèbre linéaire

Diagonalisation, trigonalisation

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annihilée par un polynôme **scindé à racines simples** est diagonalisable.
- Une matrice **symétrique** réelle est toujours **diagonalisable (en base orthonormale)**.

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S + N$ précédente.

- **Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est toujours trigonalisable** càd conjuguée à une matrice triangulaire supérieure.
- L'ensemble des matrices diagonalisables sur \mathbb{C} est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
- Une famille de matrices qui commutent est trigonalisable dans une même base.

Rappels d'algèbre linéaire

Exponentielle de matrice

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- Si A et B commutent $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ mais si elles ne **commutent pas**, c'est en général **faux**.

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- Si A et B commutent $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ mais si elles ne **commutent pas**, c'est en général **faux**.
- On a pour tout $P \in GL(n, \mathbb{R})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}.$$

Rappels d'algèbre linéaire

Exponentielle de matrice

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- Si A et B commutent $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ mais si elles ne **commutent pas**, c'est en général **faux**.
- On a pour tout $P \in GL(n, \mathbb{R})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}.$$

- $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$.

- 1 Plan M1-SD
- 2 Plan du cours
- 3 Rappels de topologie
- 4 Rappels d'algèbre linéaire
- 5 Rappels de calcul différentiel**
- 6 Théorème du point fixe de Picard
- 7 Inversion locale et fonctions implicites

Rappels de calcul différentiel

Rappels de calcul différentiel

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow F$.

Rappels de calcul différentiel

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow F$.

Definition

$f : U \rightarrow F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si \exists appl. lin. continue $Df(x_0) : E \rightarrow F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : **dérivée** ou **l'application linéaire tangente** ou encore la **différentielle** de f en x_0 .

Rappels de calcul différentiel

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow F$.

Definition

$f : U \rightarrow F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si \exists appl. lin. continue $Df(x_0) : E \rightarrow F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : **dérivée** ou **l'application linéaire tangente** ou encore la **différentielle** de f en x_0 .

Remarques

Rappels de calcul différentiel

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow F$.

Definition

$f : U \rightarrow F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si \exists appl. lin. continue $Df(x_0) : E \rightarrow F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : **dérivée** ou **l'application linéaire tangente** ou encore la **différentielle** de f en x_0 .

Remarques

- $o(\|v\|) = \|v\|\epsilon(v)$ où $\lim_{v \rightarrow 0} \epsilon(v) = 0$.

Rappels de calcul différentiel

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow F$.

Definition

$f : U \rightarrow F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si \exists appl. lin. continue $Df(x_0) : E \rightarrow F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : **dérivée** ou **l'application linéaire tangente** ou encore la **différentielle** de f en x_0 .

Remarques

- $o(\|v\|) = \|v\|\epsilon(v)$ où $\lim_{v \rightarrow 0} \epsilon(v) = 0$.
- Si elle existe, une telle application linéaire est unique.

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow F$.

Definition

$f : U \rightarrow F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si \exists appl. lin. continue $Df(x_0) : E \rightarrow F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : **dérivée** ou **l'application linéaire tangente** ou encore la **différentielle** de f en x_0 .

Remarques

- $o(\|v\|) = \|v\|\epsilon(v)$ où $\lim_{v \rightarrow 0} \epsilon(v) = 0$.
- Si elle existe, une telle application linéaire est unique.
- La continuité de l'appl. lin. $Df(x_0)$ est automatique en dimension finie.

Rappels de calcul différentiel

- L'appl. lin. $Df(x_0)$ continue (i.e $\|Df(x_0).v\|_F \leq C.\|v\|_E$) : f continue en x_0 .

- L'appl. lin. $Df(x_0)$ continue (i.e $\|Df(x_0).v\|_F \leq C.\|v\|_E$) : f continue en x_0 .
- Si f est dérivable en tout point de U et si l'application $x \mapsto Df(x)$ (de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme d'opérateurs) est continue on dit que f est C^1 .

- L'appl. lin. $Df(x_0)$ continue (i.e $\|Df(x_0).v\|_F \leq C.\|v\|_E$) : f continue en x_0 .
- Si f est dérivable en tout point de U et si l'application $x \mapsto Df(x)$ (de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme d'opérateurs) est continue on dit que f est C^1 .
- Si $x \mapsto Df(x)$ est dérivable sa dérivée est une application continue de E dans $L_c(E, F)$ qu'on note $D^2f(x)$. Elle s'identifie avec une application **bilinéaire continue** de $E \times E \rightarrow F$.

- L'appl. lin. $Df(x_0)$ continue (i.e $\|Df(x_0).v\|_F \leq C.\|v\|_E$) : f continue en x_0 .
- Si f est dérivable en tout point de U et si l'application $x \mapsto Df(x)$ (de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme d'opérateurs) est continue on dit que f est C^1 .
- Si $x \mapsto Df(x)$ est dérivable sa dérivée est une application continue de E dans $L_c(E, F)$ qu'on note $D^2f(x)$. Elle s'identifie avec une application bilinéaire continue de $E \times E \rightarrow F$.
- De la même façon on peut définir par récurrence la notion d'application de classe C^p ; $D^p f(x)$ est par nature une application p -linéaire continue de E^p dans F .

Rappels de calcul différentiel

Dérivées partielles

- $f : E \times F \rightarrow G$ t.q. pour $y \in F$ fixé l'application $E \rightarrow G$, $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable, on note $D_1f(x, y)$ ou $\partial_x f(x, y)$ sa dérivée en x : **dérivée partielle**.

Rappels de calcul différentiel

Dérivées partielles

- $f : E \times F \rightarrow G$ t.q. pour $y \in F$ fixé l'application $E \rightarrow G$, $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable, on note $D_1 f(x, y)$ ou $\partial_x f(x, y)$ sa dérivée en x : **dérivée partielle**.
- En **dimension finie**, Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ est C^1 , $Df(x)$ s'identifie avec la **matrice jacobienne** $Jf(x)$:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Rappels de calcul différentiel

Dérivées partielles

- $f : E \times F \rightarrow G$ t.q. pour $y \in F$ fixé l'application $E \rightarrow G$, $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable, on note $D_1 f(x, y)$ ou $\partial_x f(x, y)$ sa dérivée en x : **dérivée partielle**.
- En **dimension finie**, Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ est C^1 , $Df(x)$ s'identifie avec la **matrice jacobienne** $Jf(x)$:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

- En dim. quelconque si E, F, G EVN, U ouvert de $E \times F$ et $f : U \rightarrow G$ **f est de classe C^1 ssi toutes ses dérivées partielles existent et sont continues** sur U .

Rappels de calcul différentiel

Exemples

Rappels de calcul différentiel

Exemples

- $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^2 ;$

Rappels de calcul différentiel

Exemples

- $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^2 ;$
 $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), H \mapsto AH + HA.$

Rappels de calcul différentiel

Exemples

- $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^2$;
 $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;

Rappels de calcul différentiel

Exemples

- $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^2$;
 $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;
 $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.

Rappels de calcul différentiel

Exemples

- $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^2$;
 $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;
 $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
- $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$ est C^1 ;

Rappels de calcul différentiel

Exemples

- $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^2$;
 $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;
 $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
- $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$ est C^1 ;
 $D\det(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, H \mapsto \text{tr}(\text{Co}(A)^T H)$ où $\text{Co}(A)^T =$
transposée de la co-matrice de A .

Rappels de calcul différentiel

Exemples

- $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^2$;
 $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;
 $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
- $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$ est C^1 ;
 $D\det(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, H \mapsto \text{tr}(\text{Co}(A)^T H)$ où $\text{Co}(A)^T =$
transposée de la co-matrice de A .
- Exemple en dimension infinie : $\Phi : C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\Phi : u \mapsto \int_0^1 K(\cdot, y, u(y))dy$ de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est C^1 si K est elle-même
 C^1 .

Rappels de calcul différentiel

Quelques propriétés utiles

- **Composition** $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$

Rappels de calcul différentiel

Quelques propriétés utiles

- **Composition** $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- **Accroissements finis** : Si U est un ouvert **convexe**, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.

Rappels de calcul différentiel

Quelques propriétés utiles

- **Composition** $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- **Accroissements finis** : Si U est un ouvert **convexe**, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.
- **Théorème de Schwarz** : Si f est p -fois dérivable $D^p f(x)$ est une application p -linéaire **symétrique**.

Rappels de calcul différentiel

Quelques propriétés utiles

- **Composition** $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- **Accroissements finis** : Si U est un ouvert **convexe**, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.
- **Théorème de Schwarz** : Si f est p -fois dérivable $D^p f(x)$ est une application p -linéaire **symétrique**.
- **Formules de Taylor (reste intégral)** Si U est un ouvert convexe et $f : U \rightarrow F$ est de classe C^{p+1} ; alors,

$$f(b) - f(a) - Df(a).(b - a) - \dots - \frac{1}{p!} D^p f(a).((b - a))^p = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} D^{p+1} f(a + t(b - a)).((b - a))^{p+1} dt.$$

Rappels de calcul différentiel

Quelques propriétés utiles

- **Composition** $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- **Accroissements finis** : Si U est un ouvert **convexe**, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.
- **Théorème de Schwarz** : Si f est p -fois dérivable $D^p f(x)$ est une application p -linéaire **symétrique**.
- **Formules de Taylor (reste intégral)** Si U est un ouvert convexe et $f : U \rightarrow F$ est de classe C^{p+1} ; alors,

$$f(b) - f(a) - Df(a).(b - a) - \dots - \frac{1}{p!} D^p f(a).((b - a))^p = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} D^{p+1} f(a + t(b - a)).((b - a))^{p+1} dt.$$

- L'espace $C^p(U, F)$ muni de la norme $\|f\|_p = \max_{0 \leq k \leq p} \sup_{x \in U} \|D^k f(x)\|$ est un espace de Banach

- 1 Plan M1-SD
- 2 Plan du cours
- 3 Rappels de topologie
- 4 Rappels d'algèbre linéaire
- 5 Rappels de calcul différentiel
- 6 Théorème du point fixe de Picard**
- 7 Inversion locale et fonctions implicites

Théorème du point fixe de Picard

(A, d_A) , (B, d_B) deux espaces métriques.

- $T : A \rightarrow B$ est ρ -lipschitzienne ssi $\forall x, y \in A$,

$$d_B(T(x), T(y)) \leq \rho \cdot d_A(x, y).$$

Théorème du point fixe de Picard

(A, d_A) , (B, d_B) deux espaces métriques.

- $T : A \rightarrow B$ est ρ -lipschitzienne ssi $\forall x, y \in A$,

$$d_B(T(x), T(y)) \leq \rho \cdot d_A(x, y).$$

- Si $A = B$, $T : A \rightarrow A$ est ρ -contractante si ρ -lipschitzienne avec $0 \leq \rho < 1$.

Théorème du point fixe de Picard

(A, d_A) , (B, d_B) deux espaces métriques.

- $T : A \rightarrow B$ est **ρ -lipschitzienne** ssi $\forall x, y \in A$,

$$d_B(T(x), T(y)) \leq \rho \cdot d_A(x, y).$$

- Si $A = B$, $T : A \rightarrow A$ est **ρ -contractante** si ρ -lipschitzienne avec $0 \leq \rho < 1$.
- Lipschitzienne \implies continue.

Théorème du point fixe de Picard

(A, d_A) , (B, d_B) deux espaces métriques.

- $T : A \rightarrow B$ est **ρ -lipschitzienne** ssi $\forall x, y \in A$,

$$d_B(T(x), T(y)) \leq \rho \cdot d_A(x, y).$$

- Si $A = B$, $T : A \rightarrow A$ est **ρ -contractante** si ρ -lipschitzienne avec $0 \leq \rho < 1$.
- Lipschitzienne \implies continue.
 $C^{lip}(A, B)$ = l'ensemble des $T : A \rightarrow B$ lipschitziennes ;

Théorème du point fixe de Picard

(A, d_A) , (B, d_B) deux espaces métriques.

- $T : A \rightarrow B$ est ρ -lipschitzienne ssi $\forall x, y \in A$,

$$d_B(T(x), T(y)) \leq \rho \cdot d_A(x, y).$$

- Si $A = B$, $T : A \rightarrow A$ est ρ -contractante si ρ -lipschitzienne avec $0 \leq \rho < 1$.
- Lipschitzienne \implies continue.
 $C^{lip}(A, B)$ = l'ensemble des $T : A \rightarrow B$ lipschitziennes ;
 $Lip(T)$ la plus petite constante ρ admissible dans la définition précédente.

Rappels : Espaces métriques complets

Si (X, d) est métrique :

Rappels : Espaces métriques complets

Si (X, d) est métrique :

- Une **suite de Cauchy** suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geq N, d(u_n, u_m) \leq \epsilon$.

Si (X, d) est métrique :

- Une **suite de Cauchy** suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geq N, d(u_n, u_m) \leq \epsilon$.
- Espace métrique (X, d) **complet** : toute suite de Cauchy converge.

Si (X, d) est métrique :

- Une **suite de Cauchy** suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geq N, d(u_n, u_m) \leq \epsilon$.
- Espace métrique (X, d) **complet** : toute suite de Cauchy converge.
- Espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ **Banach** : complet.

Si (X, d) est métrique :

- Une **suite de Cauchy** suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geq N, d(u_n, u_m) \leq \epsilon$.
- Espace métrique (X, d) **complet** : toute suite de Cauchy converge.
- Espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ **Banach** : complet.
-

$$\begin{cases} F \subset X \text{ fermé} \\ (X, d) \text{ complet} \end{cases} \implies (F, d) \text{ complet.}$$

Théorème du point fixe de Picard

Théorème (du point fixe de Picard)

(A, d) soit **complet**, $T : A \rightarrow A$, ρ -*contractante* ($0 \leq \rho < 1$). Alors

Théorème (du point fixe de Picard)

(A, d) soit **complet**, $T : A \rightarrow A$, ρ -**contractante** ($0 \leq \rho < 1$). Alors

- T **admet un unique point fixe** $x \in A$ (i.e. $T(x) = x$).

Théorème (du point fixe de Picard)

(A, d) soit **complet**, $T : A \rightarrow A$, ρ -**contractante** ($0 \leq \rho < 1$). Alors

- T **admet un unique point fixe** $x \in A$ (i.e. $T(x) = x$).
- Pour tout $x_0 \in A$ la suite $T^i(x_0)$ converge vers x .

Théorème (du point fixe de Picard)

(A, d) soit **complet**, $T : A \rightarrow A$, ρ -**contractante** ($0 \leq \rho < 1$). Alors

- T **admet un unique point fixe** $x \in A$ (i.e. $T(x) = x$).
- Pour tout $x_0 \in A$ la suite $T^i(x_0)$ converge vers x .

Remarque :

Théorème (du point fixe de Picard)

(A, d) soit **complet**, $T : A \rightarrow A$, ρ -**contractante** ($0 \leq \rho < 1$). Alors

- T **admet un unique point fixe** $x \in A$ (i.e. $T(x) = x$).
- Pour tout $x_0 \in A$ la suite $T^i(x_0)$ converge vers x .

Remarque : mêmes conclusions s'il existe n t.q. T^n contractante :

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- **Existence** : Si $y \in A$,
$$d(T^{n+1}(y), T^n(y)) \leq \rho d(T^n(y), T^{n-1}(y)) \leq \rho^n d(T(y), y).$$

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- **Existence** : Si $y \in A$,
 $d(T^{n+1}(y), T^n(y)) \leq \rho d(T^n(y), T^{n-1}(y)) \leq \rho^n d(T(y), y)$.
- Donc **en sommant** de n à $n + p - 1$,

$$d(T^{n+p}(y), T^n(y)) \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} d(T(y), y).$$

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- **Existence** : Si $y \in A$,
 $d(T^{n+1}(y), T^n(y)) \leq \rho d(T^n(y), T^{n-1}(y)) \leq \rho^n d(T(y), y)$.
- Donc **en sommant** de n à $n + p - 1$,

$$d(T^{n+p}(y), T^n(y)) \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} d(T(y), y).$$

- La suite $T^n(y)$ est par conséquent **de Cauchy** et ainsi converge vers un x : $T^n(y) \rightarrow x$

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- **Existence** : Si $y \in A$,
 $d(T^{n+1}(y), T^n(y)) \leq \rho d(T^n(y), T^{n-1}(y)) \leq \rho^n d(T(y), y)$.
- Donc **en sommant** de n à $n + p - 1$,

$$d(T^{n+p}(y), T^n(y)) \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} d(T(y), y).$$

- La suite $T^n(y)$ est par conséquent **de Cauchy** et ainsi converge vers un x : $T^n(y) \rightarrow x$
- Comme $T^n(y) \rightarrow x$ on a $T^{n+1}(y) \rightarrow T(x)$ et donc

$$T(T^n(x)) = T^{n+1}(x) \implies T(x) = x.$$

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- **Existence** : Si $y \in A$,
 $d(T^{n+1}(y), T^n(y)) \leq \rho d(T^n(y), T^{n-1}(y)) \leq \rho^n d(T(y), y)$.
- Donc **en sommant** de n à $n + p - 1$,

$$d(T^{n+p}(y), T^n(y)) \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} d(T(y), y).$$

- La suite $T^n(y)$ est par conséquent **de Cauchy** et ainsi converge vers un x : $T^n(y) \rightarrow x$
- Comme $T^n(y) \rightarrow x$ on a $T^{n+1}(y) \rightarrow T(x)$ et donc

$$T(T^n(x)) = T^{n+1}(x) \implies T(x) = x.$$

- **Unicité** : si $T(y) = y$ et $T(y') = y'$ alors

$$d(y, y') = d(T(y), T(y')) \leq \rho d(y, y')$$

et comme $0 \leq \rho < 1$ on a $d(y, y') = 0$. $\implies y = y'$.

Théorème du point fixe de Picard

Versions à paramètres

Remarque **importante** pour la suite : Il existe des versions à **paramètres** du théorème de Picard (qu'il faut connaître).

Théorème du point fixe de Picard

Versions à paramètres

Remarque **importante** pour la suite : Il existe des versions à **paramètres** du théorème de Picard (qu'il faut connaître).

- **Version C^0 et Lipschitz.** : (A, d) complet, Λ espace métrique

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_\lambda \text{ dépend } C^0 \text{ ou Lipschitz d'un paramètre } \lambda \in \Lambda \\ \forall \lambda \in \Lambda, T_\lambda(\cdot) \text{ est } \rho\text{-contractante } (\rho < 1) \end{array} \right.$$

\implies le point fixe $x(\lambda)$ **dépend C^0 ou Lipschitz** de λ .

Théorème du point fixe de Picard

Versions à paramètres

- **Version C^k .** : A fermé d'un Banach E , U ouvert de E t.q. $A \subset U$, Λ est un ouvert d'un EVN,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in \Lambda, \quad T_\lambda : A \rightarrow A \\ \forall \lambda \in \Lambda, T_\lambda(\cdot) \text{ est } \rho\text{-contractante } (\rho < 1) \\ f \text{ } C^k \text{ par rapport à } (x, \lambda) \in U \times \Lambda \\ \forall (x, \lambda) \in U \times \Lambda, \quad \|D_x T(x, \lambda)\| \leq \rho < 1 \end{array} \right.$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} x(\lambda) \text{ dépend } C^k \text{ de } \lambda \text{ et} \\ D_x(x(\lambda)) = -(D_x T(x(\lambda), \lambda) - Id)^{-1} D_\lambda T(x(\lambda), \lambda). \end{array} \right.$$

- 1 Plan M1-SD
- 2 Plan du cours
- 3 Rappels de topologie
- 4 Rappels d'algèbre linéaire
- 5 Rappels de calcul différentiel
- 6 Théorème du point fixe de Picard
- 7 Inversion locale et fonctions implicites**

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \rightarrow F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \rightarrow F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \rightarrow F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ deux espaces de Banach, } x_0 \in E \\ f : (E, x_0) \rightarrow F \text{ de classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{) t.q. } f(x_0) = y_0 \in F \\ Df(x_0) \in L_c(E, F) \text{ inversible (et son inverse est donc continu)} \end{array} \right.$$

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \rightarrow F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ deux espaces de Banach, } x_0 \in E \\ f : (E, x_0) \rightarrow F \text{ de classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{) t.q. } f(x_0) = y_0 \in F \\ Df(x_0) \in L_c(E, F) \text{ inversible (et son inverse est donc continu)} \end{array} \right.$$

$\implies f$ est un *difféomorphisme local* de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \rightarrow F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ deux espaces de Banach, } x_0 \in E \\ f : (E, x_0) \rightarrow F \text{ de classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{) t.q. } f(x_0) = y_0 \in F \\ Df(x_0) \in L_c(E, F) \text{ inversible (et son inverse est donc continu)} \end{array} \right.$$

$\implies f$ est un *difféomorphisme local* de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \rightarrow F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ deux espaces de Banach, } x_0 \in E \\ f : (E, x_0) \rightarrow F \text{ de classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{) t.q. } f(x_0) = y_0 \in F \\ Df(x_0) \in L_c(E, F) \text{ inversible (et son inverse est donc continu)} \end{array} \right.$$

$\implies f$ est un *difféomorphisme local* de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0

Preuve.—

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \rightarrow F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ deux espaces de Banach, } x_0 \in E \\ f : (E, x_0) \rightarrow F \text{ de classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{) t.q. } f(x_0) = y_0 \in F \\ Df(x_0) \in L_c(E, F) \text{ inversible (et son inverse est donc continu)} \end{array} \right.$$

$\implies f$ est un *difféomorphisme local* de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0

Preuve. – On suppose $x_0 = y_0 = 0$.

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \rightarrow F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ deux espaces de Banach, } x_0 \in E \\ f : (E, x_0) \rightarrow F \text{ de classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{) t.q. } f(x_0) = y_0 \in F \\ Df(x_0) \in L_c(E, F) \text{ inversible (et son inverse est donc continu)} \end{array} \right.$$

$\implies f$ est un *difféomorphisme local* de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0

Preuve. – On suppose $x_0 = y_0 = 0$. On applique *Picard à paramètre* à

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \rightarrow F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ deux espaces de Banach, } x_0 \in E \\ f : (E, x_0) \rightarrow F \text{ de classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{) t.q. } f(x_0) = y_0 \in F \\ Df(x_0) \in L_c(E, F) \text{ inversible (et son inverse est donc continu)} \end{array} \right.$$

$\implies f$ est un *difféomorphisme local* de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0

Preuve.— On suppose $x_0 = y_0 = 0$. On applique *Picard à paramètre* à $T_y(x) := Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1}.f(x))$ (y est le paramètre) :

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \rightarrow F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ deux espaces de Banach, } x_0 \in E \\ f : (E, x_0) \rightarrow F \text{ de classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{) t.q. } f(x_0) = y_0 \in F \\ Df(x_0) \in L_c(E, F) \text{ inversible (et son inverse est donc continu)} \end{array} \right.$$

$\implies f$ est un *difféomorphisme local* de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0

Preuve.— On suppose $x_0 = y_0 = 0$. On applique *Picard à paramètre* à $T_y(x) := Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1}.f(x))$ (y est le paramètre) :

$$T_y(x) = x \iff f(x) = y.$$

Il faut donc vérifier que **si y est suffisamment petit**

$$T_y : x \mapsto Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1} \cdot f(x))$$

Il faut donc vérifier que **si y est suffisamment petit**

$$T_y : x \mapsto Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1} \cdot f(x))$$

- 1 Envoie une boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$ dans elle-même pour un $\delta > 0$.

Il faut donc vérifier que **si y est suffisamment petit**

$$T_y : x \mapsto Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1} \cdot f(x))$$

- 1 Envoie une boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$ dans elle-même pour un $\delta > 0$.
- 2 Est bien contractante sur cette boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$.

Il faut donc vérifier que **si y est suffisamment petit**

$$T_y : x \mapsto Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1} \cdot f(x))$$

- 1 Envoie une boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$ dans elle-même pour un $\delta > 0$.
- 2 Est bien contractante sur cette boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$.

Or

$$DT_y(\cdot) = id - Df(0)^{-1}Df(\cdot) \implies \|DT_y\| \leq \varepsilon(\delta), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Il faut donc vérifier que **si y est suffisamment petit**

$$T_y : x \mapsto Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1} \cdot f(x))$$

- 1 Envoie une boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$ dans elle-même pour un $\delta > 0$.
- 2 Est bien contractante sur cette boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$.

Or

$$DT_y(\cdot) = id - Df(0)^{-1}Df(\cdot) \implies \|DT_y\| \leq \varepsilon(\delta), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

donc par les accroissements finis si δ et $\|y\| \ll 1$, $x \in \overline{B(0, \delta)}$

Il faut donc vérifier que **si y est suffisamment petit**

$$T_y : x \mapsto Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1} \cdot f(x))$$

- 1 Envoie une boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$ dans elle-même pour un $\delta > 0$.
- 2 Est bien contractante sur cette boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$.

Or

$$DT_y(\cdot) = id - Df(0)^{-1}Df(\cdot) \implies \|DT_y\| \leq \varepsilon(\delta), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

donc par les accroissements finis si δ et $\|y\| \ll 1$, $x \in \overline{B(0, \delta)}$

- 1 $\|T_y(x)\| \leq \|Df(0)^{-1}\| \cdot \|y\| + \varepsilon(\delta)\|x\| \leq 2\delta\varepsilon(\delta) \leq \delta$

Il faut donc vérifier que **si y est suffisamment petit**

$$T_y : x \mapsto Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1} \cdot f(x))$$

- 1 Envoie une boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$ dans elle-même pour un $\delta > 0$.
- 2 Est bien contractante sur cette boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$.

Or

$$DT_y(\cdot) = id - Df(0)^{-1}Df(\cdot) \implies \|DT_y\| \leq \varepsilon(\delta), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

donc par les accroissements finis si δ et $\|y\| \ll 1$, $x \in \overline{B(0, \delta)}$

- 1 $\|T_y(x)\| \leq \|Df(0)^{-1}\| \cdot \|y\| + \varepsilon(\delta)\|x\| \leq 2\delta\varepsilon(\delta) \leq \delta$
- 2 $\|T_y(x) - T_y(x')\| \leq \varepsilon(\delta)\|x - x'\| \leq (1/2)\|x - x'\|.$



Inversion locale

Exemples

$$(a) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f : (x, y) \mapsto (2x + y + y^3, x + y + x^5);$$

Inversion locale

Exemples

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (2x + y + y^3, x + y + x^5)$;
 $\exists \epsilon > 0$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $|u|^2 + |v|^2 \leq \epsilon$, $\exists (x, y) \in \text{Vois}(0, 0)$, t.q.
 $f(x, y) = (u, v)$.

Inversion locale

Exemples

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (2x + y + y^3, x + y + x^5)$;
 $\exists \epsilon > 0$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $|u|^2 + |v|^2 \leq \epsilon$, $\exists (x, y) \in \text{Vois}(0, 0)$, t.q.
 $f(x, y) = (u, v)$.
- (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée ; l'équation $f(x + 1) + \sin(f(x)^2) = g(x)$

Inversion locale

Exemples

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (2x + y + y^3, x + y + x^5)$;
 $\exists \epsilon > 0$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $|u|^2 + |v|^2 \leq \epsilon$, $\exists (x, y) \in \text{Vois}(0, 0)$, t.q.
 $f(x, y) = (u, v)$.
- (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée; l'équation $f(x + 1) + \sin(f(x)^2) = g(x)$
admet une solution f continue bornée pourvu que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$ soit
suffisamment petit.

Théorème (des fonctions implicites)

Théorème (des fonctions implicites)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ Banach, } (x_0, \lambda_0) \in E \times F \text{ t.q. } f(x_0, \lambda_0) = 0 \\ f : (E \times F, (x_0, \lambda_0)) \rightarrow E \text{ classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{)} \\ D_x f(x_0, \lambda_0) \in L_c(E, E) \text{ inversible} \end{array} \right.$$

Théorème (des fonctions implicites)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ Banach, } (x_0, \lambda_0) \in E \times F \text{ t.q. } f(x_0, \lambda_0) = 0 \\ f : (E \times F, (x_0, \lambda_0)) \rightarrow E \text{ classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{)} \\ D_x f(x_0, \lambda_0) \in L_c(E, E) \text{ inversible} \end{array} \right.$$

$\implies \exists$ voisinage $W = U \times V$ de (x_0, λ_0) t.q.

$$\{(x, \lambda) \in W : f(x, \lambda) = 0\} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in V\}$$

où $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est C^k .

Théorème (des fonctions implicites)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ Banach, } (x_0, \lambda_0) \in E \times F \text{ t.q. } f(x_0, \lambda_0) = 0 \\ f : (E \times F, (x_0, \lambda_0)) \rightarrow E \text{ classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{)} \\ D_x f(x_0, \lambda_0) \in L_c(E, E) \text{ inversible} \end{array} \right.$$

$\implies \exists$ voisinage $W = U \times V$ de (x_0, λ_0) t.q.

$$\{(x, \lambda) \in W : f(x, \lambda) = 0\} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in V\}$$

où $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est C^k .

On a alors $\partial_{\lambda} x = -(D_x f(x, \lambda))^{-1} \circ D_{\lambda} f$.

Théorème (des fonctions implicites)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, F \text{ Banach, } (x_0, \lambda_0) \in E \times F \text{ t.q. } f(x_0, \lambda_0) = 0 \\ f : (E \times F, (x_0, \lambda_0)) \rightarrow E \text{ classe } C^k \text{ (} k \geq 1 \text{)} \\ D_x f(x_0, \lambda_0) \in L_c(E, E) \text{ inversible} \end{array} \right.$$

$\implies \exists$ voisinage $W = U \times V$ de (x_0, λ_0) t.q.

$$\{(x, \lambda) \in W : f(x, \lambda) = 0\} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in V\}$$

où $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est C^k .

On a alors $\partial_{\lambda} x = -(D_x f(x, \lambda))^{-1} \circ D_{\lambda} f$.

Démonstration. Théo. d'inversion locale appliqué à $\phi(x, \lambda) = (f(x, \lambda), \lambda)$ définie sur un voisinage de $(E \times F, (x_0, \lambda_0)) \rightarrow E \times F$. □

Fonctions implicites

Exemples

L'ensemble $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^5 + xy - 1 = 0\}$ contient un graphe $(x, y(x))$, $-\epsilon < x < \epsilon$ pour ϵ assez petit.