M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

15 septembre 2021

Organisation du cours et ressources

- Les transparents (versions amphi et longues), feuilles de TD et listes d'errata sont disponibles en ligne
- Evaluation : CCI
- email : raphael.krikorian@cyu.fr

Cours (Raphaël Krikorian) :

- Mercredi 10h15-11h45, Salle E2
- Jeudi 12h-13h30, Salle E3

TD

- Gr1 (Marjolaine Puël) : Mercredi 12h-13h30, Salle E214
- Gr2 (Raphaël Krikorian) : Mercredi 8h30-10h, Salle E2.

Sommaire

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet, résonance paramérique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie. ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire

Plan du cours 1

Notes de cours

1. Introduction
2. Rappels de topologie
3. Rappels d'algèbre linéaire
4. Rappels de calcul différentiel

Sommaire

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion
- Electronique : oscillateurs linéaires (RLC) vs. non-linéaires
- Automatique : Théorie du contrôle et de la stabilisation...
- Economie / Finance : modèle IS-LM en macroéconomie
- Biologie : régulation cellulaire, cycle circadien, réseaux de neurones...
- Ecologie : modèles proies-prédateurs
- Epidémiologie : modèles compartimentaux SIR et ses généralisations ;
- Démographie : évolution des populations ;
- *etc.*

Exemples d'équations différentielles

Mécanique Céleste

L'exemple le plus ancien sont les équations de la Mécanique de **Newton** (*Principia Mathematica* 1687) :

$$= \text{Principe d'inertie quantitatif}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = F = \mathit{force} \\ p = m\dfrac{dx}{dt} = mv = \text{quantité de mouvement,} \end{cases}$$

En Mécanique céleste on complète ces équations par la Loi de la gravitation :

$$F_{2/1} = -K\frac{m_1 m_2}{\|x_1 - x_2\|^2}\frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}.$$

Exemples d'équations différentielles

Problème à N corps

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).
  - Chaque corps décrit une **conique** (section d'un cône par un plan)
    - soit une **ellipse** : le mouvement est périodique.
    - soit une **hyperbole** : l'astre part à l'infini.
    - soit une **parabole** (cas limite) : l'astre part à l'infini.
- $N \geqslant 3$: beaucoup plus difficile et pas complètement compris :
  - **Poincaré** (1854-1912) démontre ($\approx$ 1890) que l'on ne peut pas trouver de formules exactes pour le mouvement des corps.
  - **Smale** (1930-) : ($\approx$ 1960) Existence de mouvements chaotiques.
  - **Kolmogorov** (1903-87), **Arnold** (1937-2010) et **Moser** (1928-99) : Théorie KAM ($\approx$ 1960) et existence de mouvements quasi-périodiques.

Exemples d'équations différentielles

Comportement hyperbolique vs. harmonique

- Comportement **hyperbolique** : exemple : dynamique d'une population de taille $N(t)$ (démographie (Malthus), radioactivité...)

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Solution :} \qquad N(t) = e^{\lambda t} N(0).$$

Comportement (trop) simple
  - $\lambda > 0$: $N(t)$ tend vers l'infini exponentiellement vite ;
  - $\lambda < 0$: $N(t)$ décroit exponentiellement vite vers 0 ;
  - $\lambda = 0$: $N(t)$ est constant.

Exemples d'équations différentielles
Comportement hyperbolique vs. harmonique

- Comportement **harmonique** (périodique) : oscillateur harmonique. Exemples : masse liée à un ressort sans frottement, circuit LC (électronique), pendule linéarisé...

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Solution :} \qquad \begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Mouvement **périodique** de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Exemples d'équations différentielles
Oscillateur harmonique amorti et forcé

Exemple : circuit RLC, oscillateur harmonique avec frottement *etc.*

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}, \nu > 0.$$

$\longrightarrow$ les solution tendent exponentiellement vite vers 0

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \qquad \textbf{Stabilité asymptotique}.$$

On peut rajouter un terme de forçage (p. ex. $f(t) = a\sin(2\pi t/T)$)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = f(t), \qquad \omega \in \mathbb{R}, \nu > 0.$$

$\longrightarrow$ les solution tendent exponentiellement vite vers un **régime stationnaire** (p.ex. T-périodique).

Exemples d'équations différentielles
En dimension infinie

Equations aux dérivées partielles : EDO en dimension infinie.

- **Ondes :**

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

- **Chaleur :**

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

- **Schrödinger :**

$$i\hbar \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + V(x)u(x,t).$$

Importance des non-linéarités

Les modèles précédents sont **linéaires** et ont l'avantage de pouvoir être résolus explicitement.
Il est cependant fondamental de prendre en compte des **phénomènes non-linéaires**.
Exemples :

- Dynamique des populations :

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t), \qquad r, K > 0.$$

- Modèles proies-prédateurs : (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t)\Big(\alpha - \beta y(t)\Big) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = y(t)\Big(\delta x(t) - \gamma\Big) \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

Importance des non-linéarités

- Modèle SIR (épidémiologie) : (S : sain, I : infecté, R : guéri)

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -p \cdot I(t) \cdot S(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = p \cdot I(t) \cdot S(t) - \alpha \cdot I(t) \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \alpha \cdot I(t). \end{cases}$$

- Electronique : Résistance non-linéaire, Van der Pol...

$$\frac{d^2x(t)}{dt} - \epsilon\omega(1 - x(t)^2)\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0 \quad \text{ou} \quad f(t).$$

Importance des non-linéarités

De nouveaux phénomènes apparaissent.

- Dynamiques plus riches.
- Coexistence de comportements hyperbolique et périodiques.
- Apparition de dynamiques chaotiques.

Analyse des EDO

En général impossible de résoudre explicitement une EDO :

- comprendre comportement qualitatif ;
- ou décrire comportement(s) approché(s).

Utilisation de méthodes

- géométriques
- de méthodes analytiques : théorie des perurbations.

Concepts importants

- Existence et unicité des solutions.
- Temps de vie des solutions. Phénomènes d'explosion en temps fini.
- Existence d'équilibre, solutions périodiques.
- Stabilité / instabilité.
- Robustesse : que se passe-t-il si on perturbe un peu le système ?
- Bifurcations : comment le comportement des solutions d'une EDO peut changer ? $\longrightarrow$ importance des **résonances**.

Sommaire

Rappels de topologie

Pour plus de détails sur cette section consulter Fondements de l'Analyse moderne, Tome 1, Jean Dieudonné.

Espaces métriques

Un espace métrique (X, d) est la donnée d'un ensemble X et d'une distance $d : X \times X \to [0, \infty[$ telle que pour tous $x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$
(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

Un exemple important est celui des espaces (vectoriels) normés : E est un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\| \cdot \| : E \to [0, \infty[$ vérifie pour tous $u, v \in E$, λ scalaire

(i) $\|u\| = 0$ ssi $u = 0$
(ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
(iii) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Dans ce cas $d(u, v) = \|u - v\|$ est une distance.

Ouverts, fermés

- Un ouvert U de X est un ensemble tel que pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$ ($B(x, r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$).
- Un ensemble est fermé ssi son complémentaire est ouvert.
- Une union (resp.intersection) quelconque d'ouverts (resp. fermés) est ouverte (resp.fermée) ; une intersection (resp. union) finie d'ouverts (resp fermés) est ouverte (resp. fermée).
- Une application $f : X \to Y$ est continue ssi pour tout $V \subset Y$ ouvert (resp. fermé) l'ensemble $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ est ouvert (resp. fermé).
- De façon équivalente f est continue si pour toute suite (x_n) de X qui converge on a $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Intérieur, fermeture

- L'intérieur $\mathring{A}$ d'un ensemble $A \subset X$ est le plus grand ouvert de X (pour l'inclusion) inclus dans A. On a $\mathring{A} = \{x \in A : \exists r > 0, B(x,r) \subset A\}$. L'ensemble $A \subset X$ est ouvert dans X si $\mathring{A} = A$.
- L'adhérence $\overline{A}$ (ou la fermeture) de $A \subset X$ est le plus petit fermé de X contenant A. On a $\overline{A} = \{x \in X,\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ \lim a_n = x\}$. L'ensemble $A \subset X$ est fermé dans X si $\overline{A} = A$.

Remarque : topologie sur X

- La collection de tous les ouverts d'un espace métrique s'appelle sa topologie.
- De façon générale une topologie sur un ensemble X est une collection d'ensembles (les ouverts de la topologie) qui contient l'ensemble vide et X, qui est stable par unions quelconques et stable par intersections finies.
- Si (X,d) est un espace métrique et $Y \subset X$, la restriction de d à $Y \times Y$ est encore une distance dite distance induite. Les ouverts de (Y,d) sont les intersections des ouverts de X avec Y. On dit que la topologie de (Y,d) est *induite* par celle de X.

Espaces métriques complets

Si (X,d) est métrique :

- Une suite de Cauchy (u_n) est par définition une suite telle que : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geqslant N$, on ait $d(u_n, u_m) \leqslant \epsilon$.
- Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy converge.
- Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit de Banach s'il est complet.

Espaces métriques complets

Exemples

Exemples

- Si E est un espace vectoriel de dimension finie (sur $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$), il est complet pour n'importe laquelle de ses normes.
- Si U est un ouvert de l'EVN E et si F est un Banach alors l'ensemble $C^0(U,F)$ des applications continues $f : U \to F$ telles que $\sup_{x \in U} \|f(x)\| < \infty$, muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in U} \|f(x)\|$ est un espace de Banach.

Espaces métriques complets
Exemples

- L'espace vectoriel des applications linéaires continues de $E \to F$, noté $L_c(E,F)$, muni de la norme d'opérateur est un espace de Banach si F est de Banach : la norme d'opérateur est définie par : si $T \in L_c(E,F)$, $\|T\| = \sup_{x \in E-\{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$.
- La norme d'opérateur vérifie : si $T, S \in L_c(E,E)$, $\|T \circ S\| \leqslant \|T\| \times \|S\|$
- L'ensemble des opérateurs linéaires continus inversibles (et d'inverse continu) d'un Banach E dans lui même est un ouvert de $L_c(E,E)$ (muni de la norme d'opérateurs) : par ex. la boule de centre id et de rayon $r < 1$ dans $L_c(E,E)$ est constitué d'opérateurs inversibles et d'inverse continu en effet : $(id - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} U^k$, si $\|U\| \leqslant r < 1$.

Espaces métriques compacts

- Un espace métrique (X,d) est compact si de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
- Un compact est toujours fermé et borné et un fermé dans un compact (muni de la distance induite) est compact.
- Si X, Y sont deux espaces métriques, si X est compact et si $f : X \to Y$ est continue alors $f(X)$ est compact (très utile).
- Critère séquentiel (X,d) est compact $\iff$ de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente. La preuve de $\Longleftarrow$ repose sur le lemme de recouvrement de Lebesgue utile en soit : si X est compact et $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X, il existe $\rho > 0$ tq pour tout $x \in X$, la boule $B(x,\rho)$ appartienne à au moins un des U_i.
- Une intersection décroissante de fermés non-vides dans un compact (X,d) est compacte et non-vide.
- Un produit quelconque de compacts est compact (topologie produit).
- En dimension finie $X \subset \mathbb{R}^n$ est compact ssi il est fermé et borné.

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X,d) est connexe ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- Il est équivalent de dire que toute application continue de X dans un ensemble fini (p. ex. $\{0,1\}$) est constante.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe s'il est connexe pour la topologie induite ((A,d) est connexe) ou de façon équivalente si toute application continue de (A,d) dans $\{0,1\}$ est constante.
- Si $A \subset X$ est connexe alors $\overline{A}$ est connexe : en effet si $f : \overline{A} \to \{0,1\}$ est continue alors $f|A$ est continue et $f(A)$ ne contient qu'un seul point (A connexe) et comme tout point de $\overline{A}$ est une limite de points de A, il en est de même de $f(\overline{A})$.

Espaces métriques connexes

- L'image d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).
- Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- On dit qu'un ensemble X est connexe par arcs si pour tous $x, y \in X$ il existe $\gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un ensemble connexe par arcs est connexe.
- Un ouvert d'un EVN est connexe par arcs ssi il est connexe.

Composantes connexes

- On dit que C est une composante connexe de X si c'est un sous-ensemble connexe de X, maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).
- Si $x \in X$, la composante connexe de x est le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant x : c'est l'union de tous les connexes de X contenant x. Cet ensemble est non vide ($\{x\}$ est un connexe contenant x) et est bien connexe : il suffit de vérifier qu'une union de connexes d'intersection non-vide est connexe (si f est une application continue de cette union dans $\{0,1\}$ elle est constante sur chacun des connexes de l'union ; comme ces connexes ont une intersection non vide, ces valeurs constantes coïncident sur tous ces connexes : le critère de connexité est vérifié).
- L'ensemble des composantes connexes de X forme une partition de X et on peut donc définir une relation d'équivalence $x \sim y$ ssi x et y sont dans la même composante connexe de X.

Composantes connexes

- Si $A \subset X$, les composantes connexes de A sont définies comme les composantes connexes de A pour la topologie induite.
- Une composante connexe est toujours fermée (l'adhérence d'une telle c.c. est connexe et par maximalité égale à la c.c.) .
- Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme (et de la distance associée) un ouvert U admet un nombre dénombrable de composantes connexes qui sont des ouverts de l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$: en effet si $x \in C$ où C est une c.c. de U alors $\exists r > 0$ t.q. la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, $B(x,r) \subset U$ est un connexe (par arcs) de U et contient x ; elle est donc nécessairement incluse dans C (par maximalité de C) ; ainsi C est ouverte. L'ensemble des composantes connexes de U forme donc une partition en ouverts de U. On peut donc choisir dans chaque C un point à coordonnées rationnelles. Ce codage démontre que la partition est au plus dénombrable.

Composantes connexes

On peut de la même façon définir la notion de composantes connexes par arcs (pour un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ces deux notions coïncident).

Sommaire

Rappels d'algèbre linéaire

- Si $\mathcal{B}$ est une base d'un K-espace vectoriel E on représente un vecteur v de E dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice colonne X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on appelle matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Si X représente v dans $\mathcal{B}$ et X' représente v dans $\mathcal{B}'$ on a $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'$.
- On identifie une application linéaire $f : E \to F$ entre deux K-espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et m et dont on a fixé des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, à une matrice A de $M_{m,n}(K)$ (m lignes et n colonnes).
- Quand on change de bases dans E et F la matrice A représentant f dans ces nouvelles bases est de le forme $P^{-1}AQ$ où P et Q sont les matrices de changement de base dans E et F.

Rappels d'algèbre linéaire

- Quand $E = F$ on parle d'endomorphisme. Quand on représente un endomorphisme par une matrice on choisit $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Après changement de la base $\mathcal{B}_E$ de E la matrice A devient $P^{-1}AP$ où P est la matrice de changement de base.
- On dit que l'endomorphisme f est un automorphisme s'il est inversible : existence de f^{-1} (resp. A) tq $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ (resp. $A^{-1}A = A^{-1}A = I$).
- $A \in M_n(K)$ est inversible $\iff$ $\det A \neq 0$. Si c'est le cas

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \times {}^tCo(A) \qquad ({}^tB = B^T = \text{transposée de } B)$$

où $Co(A)$ est la co-matrice de A c'est-à-dire la matrice $n \times n$ dont le coefficient (i,j) égale $(-1)^{i+j}$ multiplié par le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en éliminant le coefficient A_{ij}.

Rappels d'algèbre linéaire
Déterminant

- Rappels : le déterminant d'une matrice est une forme linéaire alternée des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad-bc)^{-1} \det \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Si $A, B \in M_n(K)$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Le déterminant d'une matrice A dont les colonnes sont les vecteurs colonnes $v_1, \dots, v_n$ représente le volume (avec un signe) du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$.
- On a $\det(P^{-1}AP) = \det A$ pour toute matrice P inversible. Le déterminant est donc invariant par changement de base (on peut ainsi définir le déterminant d'un endomorphisme).

Rappels d'algèbre linéaire
Trace

- La trace d'une matrice $A \in M_n(K)$ est la somme $\mathrm{tr}(A)$ de ses éléments diagonaux.
- Pour tout $P \in GL(n, K)$, on a $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$. $\longrightarrow$ permet de définit la trace d'un endomorphisme.

Rappels d'algèbre linéaire
Réduction de endomorphismes

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle valeur propre) telle que $AX = \lambda X$.
- Le spectre de A (noté $\mathrm{spec}(A)$,) c'est-à-dire ensemble des v.p. de A, coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A). \qquad \textbf{Polynôme caractéristique}$$

- Pour toute valeur propre λ de A on note E_λ l'espace propre associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda \times I)$.
- Si $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} E_\lambda$ on dit que A est diagonalisable. Il est équivalent de dire qu'il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} est diagonale.
- Les matrices d'une famille de matrices diagonalisables qui commutent sont diagonalisables dans une même base.

Rappels d'algèbre linéaire
Réduction de endomorphismes

- Une matrice n'est pas toujours diagonalisable. Exemple typique : les matrices nilpotentes càd matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- **Cayley Hamilton :** Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.
- **Polynôme minimal** : c'est le polynôme unitaire de plus bas degré $\mu_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mu_A(A) = 0$. Il divise tout polynôme qui annule A, en particulier le polynôme caractéristique.
- Si $\chi_A(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (T - \lambda)^{c_\lambda}$, $c_\lambda \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mu_A(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (T - \lambda)^{m_\lambda} \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant m_\lambda \leqslant c_\lambda.$$

- Les espace $\Gamma_\lambda = \ker(A - \lambda)^{m_\lambda}$ s'appellent les espaces caractéristiques de A.

Rappels d'algèbre linéaire
Réduction de endomorphismes

- **Théorème de décomposition des noyaux** : On a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} \Gamma_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (A - \lambda)^{m_\lambda}.$$

- **Corollaire (Dunford-Schwartz) :** Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\begin{cases} A = S + N \\ SN = NS \end{cases} \quad \text{avec} \quad S \text{ diagonalisable,} \quad N \text{ nilpotente.}$$

En outre S et N sont des polynômes en A.
- **Décomposition de Jordan :** Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs ont des $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ sur la diagonale, des 1 sur la sur-diagonale et des 0 partout ailleurs (si ces blocs sont de taille 1 il n'y a pas de sur-diagonale). Pour tout $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ un tel bloc apparaît.

Rappels d'algèbre linéaire
Diagonalisation, trigonalisation

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable.
- Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable (en base orthonormale).

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S + N$ précédente.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est toujours trigonalisable càd conjuguée à une matrice triangulaire supérieure.
- L'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
- Une famille de matrices qui commutent est trigonalisable dans une même base.

Rappels d'algèbre linéaire
Exponentielle de matrice

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots e^{\lambda_n})$.
- Si A et B commutent $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ mais si elles ne commutent pas, c'est en général faux.
- On a pour tout $P \in GL(n, \mathbb{R})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}.$$

- $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

Sommaire

Rappels de calcul différentiel

Soient E, F deux Banach, U un ouvert de E, $x_0 \in U$ et $f : U \to F$.

Definition

L'application f est différentiable (ou encore dérivable) en x_0 s'il existe une application linéaire continue $A_{x_0} : E \to F$ (la continuité est automatique en dimension finie) telle que la limite suivante est nulle :

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|f(x_0+v) - (f(x_0) + A_{x_0}.v)\|_F)}{\|v\|_E} = 0.$$

Si elle existe, une telle application linéaire est unique. On note $A_{x_0} = Df(x_0)$.

On a donc $f(x_0+v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$.

Rappels de calcul différentiel

- On notera $Df(x_0) := A_{x_0}$ et on l'appellera l'application linéaire tangente ou la différentielle de f en x_0.
- En d'autres termes, $f(x_0) + Df(x_0) \cdot v$ est, *uniformément en v* (au voisinage de $v = 0$), une bonne approximation *affine* de $f(x_0+v)$ à l'ordre $o(\|v_E\|)$.
- L'application linéaire $Df(x_0)$ étant continue (i.e vérifiant $\|Df(x_0).v\|_F \leqslant C.\|v\|_E$) il est clair que f est alors *continue* en x_0.
- Si f est dérivable en tout point de U et si l'application $x \mapsto Df(x)$ (de U dans $L_c(E,F)$ muni de la norme d'opérateurs) est continue on dit que f est C^1.
- Si $x \mapsto Df(x)$ est dérivable son application linéaire tangente est une application continue de E dans $L_c(E,F)$ qu'on note $D^2f(x)$. Elle s'identifie avec une application bilinéaire continue de $E \times E \to F$.
- De la même façon on peut définir par récurrence la notion d'application de classe C^p ; $D^pf(x)$ est par nature une application p-linéaire continue de E^p dans F.

Rappels de calcul différentiel
Exemples

- Si $f : E \times F \to G$ est telle que pour $y \in F$ fixé l'application $E \to G$, $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable, on note $D_1 f(x,y)$ ou $\partial_x f(x,y)$ sa dérivée en x. On parle alors de dérivée partielle.
- En dimension finie, Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$ est C^1, $Df(x)$ s'identifie avec la *matrice jacobienne* $Jf(x)$:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n)\right)_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}.$$

- En outre en dimension quelconque si E, F, G sont des EVN, U ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ f est de classe C^1 si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.

Rappels de calcul différentiel
Exemples

- L'application $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^2$ est dérivable et son application linéaire tangente en A est l'application linéaire $M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ qui à H associe $AH + HA$. En effet, $(A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$ et $H^2 = o(\|H\|)$.
- L'application $GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ est C^1 et sa différentielle en A est l'application linéaire $M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
- L'application $M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ est C^1 et sa différentielle en A est l'application linéaire $M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $H \mapsto \mathrm{tr}(Co(A)^T H)$ ($Co(A)^T$ est la transposée de la co-matrice de A).
- Exemple en dimension infinie : L'application $u \mapsto \int_0^1 K(y,u(y))dy$ de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ (muni de la norme du sup) vers $\mathbb{R}$ est de classe C^1 si K est elle-même C^1.

Rappels de calcul différentiel
Quelques propriétés utiles

- Composition $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- Accroissements finis : Si U est un ouvert convexe, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.
- Théorème de Schwarz : Si f est p-fois dérivable $D^p f(x)$ est une application p-linéaire symétrique.
- Formules de Taylor (reste intégral) Si U est un ouvert convexe et $f : U \to F$ est de classe C^{p+1} ; alors,

$$f(b) - f(a) - Df(a).(b-a) - \cdots \frac{1}{p!}Df^{(p)}(a).((b-a))^p = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} Df^{(p+1)}(a + t(b-a)).((b-a))^{p+1} dt.$$

- L'espace $C^p(U,F)$ muni de la norme $\|f\|_p = \max_{0\leqslant k\leqslant p} \sup_{x\in U} \|D^k f(x)\|$ est un espace de Banach