M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

15 septembre 2021

Organisation du cours et ressources

- Les transparents (versions amphi et longues), feuilles de TD et listes d'errata sont disponibles en ligne
- Evaluation : CCI
- email : raphael.krikorian@cyu.fr

Cours (Raphaël Krikorian) :

- Mercredi 10h15-11h45, Salle E2
- Jeudi 12h-13h30, Salle E3

TD

- Gr1 (Marjolaine Puël) : Mercredi 12h-13h30, Salle E214
- Gr2 (Raphaël Krikorian) : Mercredi 8h30-10h, Salle E2.

Sommaire

1. Plan M1-SD
2. Plan cours 1
3. Introduction
4. Rappels de topologie
5. Rappels d'algèbre linéaire
6. Rappels de calcul différentiel

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet, résonance paramérique.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

Notes de cours (version longue des transparents)

- Introduction générale : divers exemples d'EDO. Linéaire vs. non-linéaire, stabilité. Rappels de topologie, d'algèbre linéarie et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. linéaires et E.D.O. linéaires à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet, résonance paramérique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie. ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)

Plan du cours M1-SD

- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire

1. Plan M1-SD
2. Plan cours 1
3. Introduction
4. Rappels de topologie
5. Rappels d'algèbre linéaire
6. Rappels de calcul différentiel

Plan du cours 1

Notes de cours

1. Introduction
2. Rappels de topologie
3. Rappels d'algèbre linéaire
4. Rappels de calcul différentiel

Sommaire

1 Plan M1-SD

2 Plan cours 1

3 Introduction

4 Rappels de topologie

5 Rappels d'algèbre linéaire

6 Rappels de calcul différentiel

Exemples d'équations différentielles

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion
- Electronique : oscillateurs linéaires (RLC) vs. non-linéaires

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion
- Electronique : oscillateurs linéaires (RLC) vs. non-linéaires
- Automatique : Théorie du contrôle et de la stabilisation...

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion
- Electronique : oscillateurs linéaires (RLC) vs. non-linéaires
- Automatique : Théorie du contrôle et de la stabilisation...
- Economie / Finance : modèle IS-LM en macroéconomie

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion
- Electronique : oscillateurs linéaires (RLC) vs. non-linéaires
- Automatique : Théorie du contrôle et de la stabilisation...
- Economie / Finance : modèle IS-LM en macroéconomie
- Biologie : régulation cellulaire, cycle circadien, réseaux de neurones...

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion
- Electronique : oscillateurs linéaires (RLC) vs. non-linéaires
- Automatique : Théorie du contrôle et de la stabilisation...
- Economie / Finance : modèle IS-LM en macroéconomie
- Biologie : régulation cellulaire, cycle circadien, réseaux de neurones...
- Ecologie : modèles proies-prédateurs

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion
- Electronique : oscillateurs linéaires (RLC) vs. non-linéaires
- Automatique : Théorie du contrôle et de la stabilisation...
- Economie / Finance : modèle IS-LM en macroéconomie
- Biologie : régulation cellulaire, cycle circadien, réseaux de neurones...
- Ecologie : modèles proies-prédateurs
- Epidémiologie : modèles compartimentaux SIR et ses généralisations ;

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion
- Electronique : oscillateurs linéaires (RLC) vs. non-linéaires
- Automatique : Théorie du contrôle et de la stabilisation...
- Economie / Finance : modèle IS-LM en macroéconomie
- Biologie : régulation cellulaire, cycle circadien, réseaux de neurones...
- Ecologie : modèles proies-prédateurs
- Epidémiologie : modèles compartimentaux SIR et ses généralisations ;
- Démographie : évolution des populations ;

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion
- Electronique : oscillateurs linéaires (RLC) vs. non-linéaires
- Automatique : Théorie du contrôle et de la stabilisation...
- Economie / Finance : modèle IS-LM en macroéconomie
- Biologie : régulation cellulaire, cycle circadien, réseaux de neurones...
- Ecologie : modèles proies-prédateurs
- Epidémiologie : modèles compartimentaux SIR et ses généralisations ;
- Démographie : évolution des populations ;
- *etc.*

L'exemple le plus ancien sont les équations de la Mécanique de **Newton** (*Principia Mathematica* 1687) :

L'exemple le plus ancien sont les équations de la Mécanique de **Newton** (*Principia Mathematica* 1687) :

$$= \text{Principe d'inertie quantitatif}$$

L'exemple le plus ancien sont les équations de la Mécanique de **Newton** (*Principia Mathematica* 1687) :

$$= \text{Principe d'inertie quantitatif}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = F = \mathit{force} \\ p = m\dfrac{dx}{dt} = mv = \text{quantité de mouvement,} \end{cases}$$

L'exemple le plus ancien sont les équations de la Mécanique de **Newton** (*Principia Mathematica* 1687) :

$$= \text{Principe d'inertie quantitatif}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = F = force \\ p = m\dfrac{dx}{dt} = mv = \text{quantité de mouvement,} \end{cases}$$

En Mécanique céleste on complète ces équations par la Loi de la gravitation :

$$F_{2/1} = -K\frac{m_1 m_2}{\|x_1 - x_2\|^2}\ \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}.$$

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).
  - Chaque corps décrit une **conique** (section d'un cône par un plan)

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).
  - Chaque corps décrit une **conique** (section d'un cône par un plan)
    - soit une **ellipse** : le mouvement est périodique.

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).
  - Chaque corps décrit une **conique** (section d'un cône par un plan)
    - soit une **ellipse** : le mouvement est périodique.
    - soit une **hyperbole** : l'astre part à l'infini.

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).
  - Chaque corps décrit une **conique** (section d'un cône par un plan)
    - soit une **ellipse** : le mouvement est périodique.
    - soit une **hyperbole** : l'astre part à l'infini.
    - soit une **parabole** (cas limite) : l'astre part à l'infini.

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).
  - Chaque corps décrit une **conique** (section d'un cône par un plan)
    - soit une **ellipse** : le mouvement est périodique.
    - soit une **hyperbole** : l'astre part à l'infini.
    - soit une **parabole** (cas limite) : l'astre part à l'infini.
- $N \geqslant 3$: beaucoup plus difficile et pas complètement compris :

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).
  - Chaque corps décrit une **conique** (section d'un cône par un plan)
    - soit une **ellipse** : le mouvement est périodique.
    - soit une **hyperbole** : l'astre part à l'infini.
    - soit une **parabole** (cas limite) : l'astre part à l'infini.
- $N \geqslant 3$: beaucoup plus difficile et pas complètement compris :
  - **Poincaré** (1854-1912) démontre ($\approx$ 1890) que l'on ne peut pas trouver de formules exactes pour le mouvement des corps.

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).
  - Chaque corps décrit une **conique** (section d'un cône par un plan)
    - soit une **ellipse** : le mouvement est périodique.
    - soit une **hyperbole** : l'astre part à l'infini.
    - soit une **parabole** (cas limite) : l'astre part à l'infini.
- $N \geqslant 3$: beaucoup plus difficile et pas complètement compris :
  - **Poincaré** (1854-1912) démontre ($\approx$ 1890) que l'on ne peut pas trouver de formules exactes pour le mouvement des corps.
  - **Smale** (1930-) : ($\approx$ 1960) Existence de mouvements chaotiques.

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).
  - Chaque corps décrit une **conique** (section d'un cône par un plan)
    - soit une **ellipse** : le mouvement est périodique.
    - soit une **hyperbole** : l'astre part à l'infini.
    - soit une **parabole** (cas limite) : l'astre part à l'infini.
- $N \geqslant 3$: beaucoup plus difficile et pas complètement compris :
  - **Poincaré** (1854-1912) démontre ($\approx$ 1890) que l'on ne peut pas trouver de formules exactes pour le mouvement des corps.
  - **Smale** (1930-) : ($\approx$ 1960) Existence de mouvements chaotiques.
  - **Kolmogorov** (1903-87), **Arnold** (1937-2010) et **Moser** (1928-99) : Théorie KAM ($\approx$ 1960) et existence de mouvements quasi-périodiques.

- Comportement **hyperbolique** :

- Comportement **hyperbolique** : exemple : dynamique d'une population de taille $N(t)$ (démographie (Malthus), radioactivité...)

- Comportement **hyperbolique** : exemple : dynamique d'une population de taille $N(t)$ (démographie (Malthus), radioactivité...)

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Comportement **hyperbolique** : exemple : dynamique d'une population de taille $N(t)$ (démographie (Malthus), radioactivité...)

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Solution :} \qquad N(t) = e^{\lambda t} N(0).$$

Comportement (trop) simple

- Comportement **hyperbolique** : exemple : dynamique d'une population de taille $N(t)$ (démographie (Malthus), radioactivité...)

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Solution :} \qquad N(t) = e^{\lambda t} N(0).$$

Comportement (trop) simple

- $\lambda > 0$: $N(t)$ tend vers l'infini exponentiellement vite ;

- Comportement **hyperbolique** : exemple : dynamique d'une population de taille $N(t)$ (démographie (Malthus), radioactivité...)

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Solution :} \qquad N(t) = e^{\lambda t} N(0).$$

Comportement (trop) simple

- $\lambda > 0$: $N(t)$ tend vers l'infini exponentiellement vite ;
- $\lambda < 0$: $N(t)$ décroit exponentiellement vite vers 0 ;

- Comportement **hyperbolique** : exemple : dynamique d'une population de taille $N(t)$ (démographie (Malthus), radioactivité...)

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Solution :} \qquad N(t) = e^{\lambda t} N(0).$$

Comportement (trop) simple

- $\lambda > 0$: $N(t)$ tend vers l'infini exponentiellement vite ;
- $\lambda < 0$: $N(t)$ décroit exponentiellement vite vers 0 ;
- $\lambda = 0$: $N(t)$ est constant.

- Comportement **harmonique** (périodique) : oscillateur harmonique.

- Comportement **harmonique** (périodique) : oscillateur harmonique. Exemples : masse liée à un ressort sans frottement, circuit LC (électronique), pendule linéarisé...

- Comportement **harmonique** (périodique) : oscillateur harmonique. Exemples : masse liée à un ressort sans frottement, circuit LC (électronique), pendule linéarisé...

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

- Comportement **harmonique** (périodique) : oscillateur harmonique. Exemples : masse liée à un ressort sans frottement, circuit LC (électronique), pendule linéarisé...

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Solution :} \qquad \begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ &= A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t) \end{aligned}$$

- Comportement **harmonique** (périodique) : oscillateur harmonique.
  Exemples : masse liée à un ressort sans frottement, circuit LC (électronique), pendule linéarisé...

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Solution :} \qquad \begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Mouvement **périodique** de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Exemple : circuit RLC, oscillateur harmonique avec frottement *etc.*

Exemple : circuit RLC, oscillateur harmonique avec frottement *etc.*

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}, \nu > 0.$$

Exemple : circuit RLC, oscillateur harmonique avec frottement *etc.*

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}, \nu > 0.$$

$\longrightarrow$ les solution tendent exponentiellement vite vers 0

Exemple : circuit RLC, oscillateur harmonique avec frottement *etc.*

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\nu\frac{dx(t)}{dt}+\omega^2 x(t)=0, \qquad \omega\in\mathbb{R}, \nu>0.$$

$\longrightarrow$ les solution tendent exponentiellement vite vers 0

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0 \qquad \textbf{Stabilité asymptotique}.$$

Exemple : circuit RLC, oscillateur harmonique avec frottement *etc.*

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}, \nu > 0.$$

$\longrightarrow$ les solution tendent exponentiellement vite vers 0

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \qquad \textbf{Stabilité asymptotique}.$$

On peut rajouter un terme de forçage (p. ex. $f(t) = a\sin(2\pi t/T)$)

Exemple : circuit RLC, oscillateur harmonique avec frottement *etc.*

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}, \nu > 0.$$

$\longrightarrow$ les solution tendent exponentiellement vite vers 0

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \qquad \textbf{Stabilité asymptotique}.$$

On peut rajouter un terme de forçage (p. ex. $f(t) = a\sin(2\pi t/T)$)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = f(t), \qquad \omega \in \mathbb{R}, \nu > 0.$$

Exemple : circuit RLC, oscillateur harmonique avec frottement *etc.*

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\nu\frac{dx(t)}{dt}+\omega^2 x(t)=0, \qquad \omega\in\mathbb{R}, \nu>0.$$

$\longrightarrow$ les solution tendent exponentiellement vite vers 0

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0 \qquad \textbf{Stabilité asymptotique}.$$

On peut rajouter un terme de forçage (p. ex. $f(t)=a\sin(2\pi t/T)$)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\nu\frac{dx(t)}{dt}+\omega^2 x(t)=f(t), \qquad \omega\in\mathbb{R}, \nu>0.$$

$\longrightarrow$ les solution tendent exponentiellement vite vers un **régime stationnaire** (p.ex. T-périodique).

Exemples d'équations différentielles
En dimension infinie

Equations aux dérivées partielles : EDO en dimension infinie.

Equations aux dérivées partielles : EDO en dimension infinie.

- **Ondes :**

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Equations aux dérivées partielles : EDO en dimension infinie.

- **Ondes :**
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$
- **Chaleur :**
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Equations aux dérivées partielles : EDO en dimension infinie.

- **Ondes :**
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$
- **Chaleur :**
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$
- **Schrödinger :**
$$i\hbar\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + V(x)u(x,t).$$

Importance des non-linéarités

Les modèles précédents sont **linéaires** et ont l'avantage de pouvoir être résolus explicitement.

Importance des non-linéarités

Les modèles précédents sont **linéaires** et ont l'avantage de pouvoir être résolus explicitement.

Il est cependant fondamental de prendre en compte des **phénomènes non-linéaires**.

Importance des non-linéarités

Les modèles précédents sont **linéaires** et ont l'avantage de pouvoir être résolus explicitement.

Il est cependant fondamental de prendre en compte des **phénomènes non-linéaires**.

Exemples :

Importance des non-linéarités

Les modèles précédents sont **linéaires** et ont l'avantage de pouvoir être résolus explicitement.
Il est cependant fondamental de prendre en compte des **phénomènes non-linéaires**.
Exemples :

- Dynamique des populations :

Importance des non-linéarités

Les modèles précédents sont **linéaires** et ont l'avantage de pouvoir être résolus explicitement.

Il est cependant fondamental de prendre en compte des **phénomènes non-linéaires**.

Exemples :

- Dynamique des populations :

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t), \qquad r, K > 0.$$

Importance des non-linéarités

Les modèles précédents sont **linéaires** et ont l'avantage de pouvoir être résolus explicitement.
Il est cependant fondamental de prendre en compte des **phénomènes non-linéaires**.
Exemples :

- Dynamique des populations :

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t), \qquad r, K > 0.$$

- Modèles proies-prédateurs : (Lotka-Volterra)

Importance des non-linéarités

Les modèles précédents sont **linéaires** et ont l'avantage de pouvoir être résolus explicitement.

Il est cependant fondamental de prendre en compte des **phénomènes non-linéaires**.

Exemples :

- Dynamique des populations :

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t), \qquad r, K > 0.$$

- Modèles proies-prédateurs : (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t)\Big(\alpha - \beta y(t)\Big) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = y(t)\Big(\delta x(t) - \gamma\Big) \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

Importance des non-linéarités

- Modèle SIR (épidémiologie) : (S : sain, I : infecté, R : guéri)

Importance des non-linéarités

- Modèle SIR (épidémiologie) : (S : sain, I : infecté, R : guéri)

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -p \cdot I(t) \cdot S(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = p \cdot I(t) \cdot S(t) - \alpha \cdot I(t) \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \alpha \cdot I(t). \end{cases}$$

Importance des non-linéarités

- Modèle SIR (épidémiologie) : (S : sain, I : infecté, R : guéri)

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -p \cdot I(t) \cdot S(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = p \cdot I(t) \cdot S(t) - \alpha \cdot I(t) \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \alpha \cdot I(t). \end{cases}$$

- Electronique : Résistance non-linéaire, Van der Pol...

Importance des non-linéarités

- Modèle SIR (épidémiologie) : (S : sain, I : infecté, R : guéri)

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -p \cdot I(t) \cdot S(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = p \cdot I(t) \cdot S(t) - \alpha \cdot I(t) \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \alpha \cdot I(t). \end{cases}$$

- Electronique : Résistance non-linéaire, Van der Pol...

$$\frac{d^2x(t)}{dt} - \epsilon\omega(1 - x(t)^2)\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0 \quad \text{ou} \quad f(t).$$

Importance des non-linéarités

De nouveaux phénomènes apparaissent.

Importance des non-linéarités

De nouveaux phénomènes apparaissent.

- Dynamiques plus riches.

Importance des non-linéarités

De nouveaux phénomènes apparaissent.

- Dynamiques plus riches.
- Coexistence de comportements hyperbolique et périodiques.

Importance des non-linéarités

De nouveaux phénomènes apparaissent.

- Dynamiques plus riches.
- Coexistence de comportements hyperbolique et périodiques.
- Apparition de dynamiques chaotiques.

Analyse des EDO

En général impossible de résoudre explicitement une EDO :

Analyse des EDO

En général impossible de résoudre explicitement une EDO :

- comprendre comportement qualitatif ;

Analyse des EDO

En général impossible de résoudre explicitement une EDO :

- comprendre comportement qualitatif ;
- ou décrire comportement(s) approché(s).

Analyse des EDO

En général impossible de résoudre explicitement une EDO :

- comprendre comportement qualitatif ;
- ou décrire comportement(s) approché(s).

Utilisation de méthodes

Analyse des EDO

En général impossible de résoudre explicitement une EDO :

- comprendre comportement qualitatif ;
- ou décrire comportement(s) approché(s).

Utilisation de méthodes

- géométriques

Analyse des EDO

En général impossible de résoudre explicitement une EDO :

- comprendre comportement qualitatif ;
- ou décrire comportement(s) approché(s).

Utilisation de méthodes

- géométriques
- de méthodes analytiques : théorie des perurbations.

Concepts importants

Concepts importants

- Existence et unicité des solutions.

Concepts importants

- Existence et unicité des solutions.
- Temps de vie des solutions. Phénomènes d'explosion en temps fini.

Concepts importants

- Existence et unicité des solutions.
- Temps de vie des solutions. Phénomènes d'explosion en temps fini.
- Existence d'équilibre, solutions périodiques.

Concepts importants

- Existence et unicité des solutions.
- Temps de vie des solutions. Phénomènes d'explosion en temps fini.
- Existence d'équilibre, solutions périodiques.
- Stabilité / instabilité.

Concepts importants

- Existence et unicité des solutions.
- Temps de vie des solutions. Phénomènes d'explosion en temps fini.
- Existence d'équilibre, solutions périodiques.
- Stabilité / instabilité.
- Robustesse : que se passe-t-il si on perturbe un peu le système ?

Concepts importants

- Existence et unicité des solutions.
- Temps de vie des solutions. Phénomènes d'explosion en temps fini.
- Existence d'équilibre, solutions périodiques.
- Stabilité / instabilité.
- Robustesse : que se passe-t-il si on perturbe un peu le système ?
- Bifurcations : comment le comportement des solutions d'une EDO peut changer ? $\longrightarrow$ importance des **résonances**.

Sommaire

1 Plan M1-SD

2 Plan cours 1

3 Introduction

4 Rappels de topologie

5 Rappels d'algèbre linéaire

6 Rappels de calcul différentiel

Rappels de topologie

Rappels de topologie

Pour plus de détails sur cette section consulter Version longue.

Pour plus de détails sur cette section consulter Version longue.
(X,d) espace métrique : ensemble X et distance $d : X \times X \to [0,\infty[$:
$\forall x,y,z \in X$:

(i) $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Pour plus de détails sur cette section consulter Version longue.
(X, d) espace métrique : ensemble X et distance $d : X \times X \to [0, \infty[$:
$\forall x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r :

Pour plus de détails sur cette section consulter Version longue.
(X,d) espace métrique : ensemble X et distance $d : X \times X \to [0,\infty[$: $\forall x,y,z \in X$:

(i) $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

On note $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r :

$$B(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) < r\}.$$

Pour plus de détails sur cette section consulter Version longue.
(X, d) espace métrique : ensemble X et distance $d : X \times X \to [0, \infty[$:
$\forall x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r :

$$B(x, r) = \{y \in X,\ d(x, y) < r\}.$$

Exemple important : espaces vectoriels normés (EVN).

Intérieur, fermeture

Intérieur, fermeture

- Ouvert ensemble $U \subset X$ t.q. :

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset U.$$

Intérieur, fermeture

- Ouvert ensemble $U \subset X$ t.q. :

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset U.$$

- Fermé : complémentaire est ouvert.

Intérieur, fermeture

- Ouvert ensemble $U \subset X$ t.q. :

$$\forall x \in U, \ \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset U.$$

- Fermé : complémentaire est ouvert.
- Si $A \subset X$, intérieur de A (noté) $\mathring{A}$: plus grand ouvert de X (pour l'inclusion) inclus dans A.
  On a
  $$\mathring{A} = \{x \in A : \exists r > 0, B(x,r) \subset A\}.$$
  L'ensemble $A \subset X$ est ouvert dans X ssi $\mathring{A} = A$.

Intérieur, fermeture

- Ouvert ensemble $U \subset X$ t.q. :

$$\forall x \in U, \ \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset U.$$

- Fermé : complémentaire est ouvert.
- Si $A \subset X$, intérieur de A (noté) $\mathring{A}$: plus grand ouvert de X (pour l'inclusion) inclus dans A.
  On a

$$\mathring{A} = \{x \in A : \exists r > 0, B(x,r) \subset A\}.$$

  L'ensemble $A \subset X$ est ouvert dans X ssi $\mathring{A} = A$.
- Adhérence (ou fermeture) de A (noté $\overline{A}$) : plus petit fermé de X contenant A.
  On a

$$\overline{A} = \{x \in X, \ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \ \lim a_n = x\}.$$

  L'ensemble $A \subset X$ est fermé dans X ssi $\overline{A} = A$.

Si (X, d) est métrique :

Espaces métriques complets

Si (X, d) est métrique :

- Une suite de Cauchy suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geqslant N$, $d(u_n, u_m) \leqslant \epsilon$.

Espaces métriques complets

Si (X, d) est métrique :

- Une suite de Cauchy suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geqslant N$, $d(u_n, u_m) \leqslant \epsilon$.
- Espace métrique (X, d) complet : toute suite de Cauchy converge.

Espaces métriques complets

Si (X, d) est métrique :

- Une suite de Cauchy suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geqslant N$, $d(u_n, u_m) \leqslant \epsilon$.
- Espace métrique (X, d) complet : toute suite de Cauchy converge.
- Espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ Banach : complet.

Exemples

- E est un espace vectoriel dimension finie (sur $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$) : complet pour n'importe laquelle de ses normes (qui sont par ailleurs toutes équivalentes).

Exemples

- E est un espace vectoriel dimension finie (sur $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$) : complet pour n'importe laquelle de ses normes (qui sont par ailleurs toutes équivalentes).
- E EVN, U ouvert de E, F Banach : $C^0(U, F) := \{f : U \to F \text{continues t.q. } \sup_{x \in U} \|f(x)\| < \infty\}$, muni de norme $\|f\| = \sup_{x \in U} \|f(x)\|$ est un Banach.

- $L_c(E,F)$=ensemble des applications linéaires continues $E \to F$.

- $L_c(E,F)$=ensemble des applications linéaires continues $E \to F$.
- norme d'opérateur $T \in L(E,F)$,

$$\|T\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

- $L_c(E,F)$=ensemble des applications linéaires continues $E \to F$.
- norme d'opérateur $T \in L(E,F)$,

$$\|T\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

- $L_c(E,F)$ de Banach si F de Banach

- $L_c(E,F)$=ensemble des applications linéaires continues $E \to F$.
- norme d'opérateur $T \in L(E,F)$,

$$\|T\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

- $L_c(E,F)$ de Banach si F de Banach
- Norme d'opérateur vérifie : $T, S \in L_c(E,E)$,

$$\|T \circ S\| \leqslant \|T\| \times \|S\|.$$

Espaces métriques compacts

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) compact : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) compact : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
- compact $\implies$ fermé et borné ;
  fermé dans un compact (muni de la distance induite) $\implies$ compact.

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) compact : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
- compact $\implies$ fermé et borné ;
  fermé dans un compact (muni de la distance induite) $\implies$ compact.
- Si X, Y espaces métriques, X compact, $f : X \to Y$ est continue $\implies$ $f(X)$ compact (très utile).

- Espace métrique (X, d) compact : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
- compact $\implies$ fermé et borné ;
  fermé dans un compact (muni de la distance induite) $\implies$ compact.
- Si X, Y espaces métriques, X compact, $f : X \to Y$ est continue $\implies$ $f(X)$ compact (très utile).
- Critère séquentiel :

$$(X, d) \text{ compact } \iff$$
$$\textbf{toute suite admet une sous-suite convergente.}$$

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) compact : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
- compact $\implies$ fermé et borné ;
  fermé dans un compact (muni de la distance induite) $\implies$ compact.
- Si X, Y espaces métriques, X compact, $f : X \to Y$ est continue $\implies$ $f(X)$ compact (très utile).
- Critère séquentiel :

$$(X, d) \text{ compact } \iff \text{toute suite admet une sous-suite convergente.}$$

- Une intersection **décroissante** de fermés non-vides dans un compact (X, d) est compacte et **non-vide**.

Espaces métriques compacts

- Espace métrique (X, d) compact : de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
- compact $\implies$ fermé et borné ;
  fermé dans un compact (muni de la distance induite) $\implies$ compact.
- Si X, Y espaces métriques, X compact, $f : X \to Y$ est continue $\implies$ $f(X)$ compact (très utile).
- Critère séquentiel :

$$(X, d) \textbf{ compact } \iff$$

$$\textbf{toute suite admet une sous-suite convergente.}$$

- Une intersection **décroissante** de fermés non-vides dans un compact (X, d) est compacte et **non-vide**.
- En dimension finie $X \subset \mathbb{R}^n$ est compact ssi **fermé et borné**.

Espaces métriques connexes

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X, d) est connexe ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X, d) est connexe ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe $\iff$ toute application continue de X dans un ensemble fini (p. ex. $\{0, 1\}$) est constante.

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X, d) est connexe ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe $\iff$ toute application continue de X dans un ensemble fini (p. ex. $\{0, 1\}$) est constante.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A, d) est connexe.

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X, d) est connexe ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe $\iff$ toute application continue de X dans un ensemble fini (p. ex. $\{0, 1\}$) est constante.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A, d) est connexe.
- L'image d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X, d) est connexe ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe $\iff$ toute application continue de X dans un ensemble fini (p. ex. $\{0, 1\}$) est constante.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A, d) est connexe.
- L'image d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).
- On dit qu'un ensemble X est connexe par arcs si pour tous $x, y \in X$ il existe $\gamma : [0, 1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un ensemble connexe par arcs est connexe.

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X, d) est connexe ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X, d) connexe $\iff$ toute application continue de X dans un ensemble fini (p. ex. $\{0, 1\}$) est constante.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A, d) est connexe.
- L'image d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).
- On dit qu'un ensemble X est connexe par arcs si pour tous $x, y \in X$ il existe $\gamma : [0, 1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un ensemble connexe par arcs est connexe.
- Un ouvert d'un EVN est connexe par arcs ssi il est connexe.

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X,d) est connexe ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- (X,d) connexe $\iff$ toute application continue de X dans un ensemble fini (p. ex. $\{0,1\}$) est constante.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe si (A,d) est connexe.
- L'image d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).
- On dit qu'un ensemble X est connexe par arcs si pour tous $x,y \in X$ il existe $\gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un ensemble connexe par arcs est connexe.
- Un ouvert d'un EVN est connexe par arcs ssi il est connexe.
- Les connexes de $\mathbb{R}$ = les intervalles.

Composantes connexes

Composantes connexes

- C composante connexe de X : sous-ensemble connexe de X, maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).

Composantes connexes

- C composante connexe de X : sous-ensemble connexe de X, maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).
- $x \in X$, la composante connexe de x : le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant x = l'union de tous les connexes de X contenant x. Cet ensemble est non vide et est bien connexe.

Composantes connexes

- C composante connexe de X : sous-ensemble connexe de X, maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).
- $x \in X$, la composante connexe de x : le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant x = l'union de tous les connexes de X contenant x. Cet ensemble est non vide et est bien connexe.
- $\{$composantes connexes de $X\}$: partition de X ;
  rel. d'éq. $x \sim y \iff x$ et y dans la même c.c. de X.

Composantes connexes

- C composante connexe de X : sous-ensemble connexe de X, maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).
- $x \in X$, la composante connexe de x : le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant x = l'union de tous les connexes de X contenant x. Cet ensemble est non vide et est bien connexe.
- $\{$composantes connexes de $X\}$: partition de X ;
  rel. d'éq. $x \sim y \iff x$ et y dans la même c.c. de X.
- U ouvert de $\mathbb{R}^n$: nombre dénombrable de c.c. qui sont des ouverts $\mathbb{R}^n$

Sommaire

1. Plan M1-SD
2. Plan cours 1
3. Introduction
4. Rappels de topologie
5. Rappels d'algèbre linéaire
6. Rappels de calcul différentiel

Rappels d'algèbre linéaire

- Si $\mathcal{B}$ est une base d'un K-espace vectoriel E on représente un vecteur v de E dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice colonne X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.

- Si $\mathcal{B}$ est une base d'un K-espace vectoriel E on représente un vecteur v de E dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice colonne X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on appelle matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Si $\mathcal{B}$ est une base d'un K-espace vectoriel E on représente un vecteur v de E dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice colonne X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on appelle matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Si X représente v dans $\mathcal{B}$ et X' représente v dans $\mathcal{B}'$ on a $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'$.

Rappels d'algèbre linéaire

- Si $\mathcal{B}$ est une base d'un K-espace vectoriel E on représente un vecteur v de E dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice colonne X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on appelle matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Si X représente v dans $\mathcal{B}$ et X' représente v dans $\mathcal{B}'$ on a $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'$.
- On identifie une application linéaire $f : E \to F$ entre deux K-espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et m et dont on a fixé des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, à une matrice A de $M_{m,n}(K)$ (m lignes et n colonnes).

- Si $\mathcal{B}$ est une base d'un K-espace vectoriel E on représente un vecteur v de E dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice colonne X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on appelle matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Si X représente v dans $\mathcal{B}$ et X' représente v dans $\mathcal{B}'$ on a $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'$.
- On identifie une application linéaire $f : E \to F$ entre deux K-espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et m et dont on a fixé des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, à une matrice A de $M_{m,n}(K)$ (m lignes et n colonnes).
- Quand on change de bases dans E et F la matrice A représentant f dans ces nouvelles bases est de le forme $P^{-1}AQ$ où P et Q sont les matrices de changement de base dans E et F.

- Quand $E = F$ on parle d'endomorphisme. Quand on représente un endomorphisme par une matrice on choisit $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Après changement de la base $\mathcal{B}_E$ de E la matrice A devient $P^{-1}AP$ où P est la matrice de changement de base.

- Quand $E = F$ on parle d'endomorphisme. Quand on représente un endomorphisme par une matrice on choisit $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Après changement de la base $\mathcal{B}_E$ de E la matrice A devient $P^{-1}AP$ où P est la matrice de changement de base.
- On dit que l'endomorphisme f est un automorphisme s'il est inversible : existence de f^{-1} (resp. A) tq $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ (resp. $A^{-1}A = A^{-1}A = I$).

- Quand $E = F$ on parle d'endomorphisme. Quand on représente un endomorphisme par une matrice on choisit $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Après changement de la base $\mathcal{B}_E$ de E la matrice A devient $P^{-1}AP$ où P est la matrice de changement de base.
- On dit que l'endomorphisme f est un automorphisme s'il est inversible : existence de f^{-1} (resp. A) tq $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ (resp. $A^{-1}A = A^{-1}A = I$).
- $A \in M_n(K)$ est inversible $\iff$ $\det A \neq 0$. Si c'est le cas

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \times {}^tCo(A) \qquad ({}^tB = B^T = \text{transposée de } B)$$

où $Co(A)$ est la co-matrice de A c'est-à-dire la matrice $n \times n$ dont le coefficient (i, j) égale $(-1)^{i+j}$ multiplié par le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en éliminant le coefficient A_{ij}.

- Rappels : le déterminant d'une matrice est une forme linéaire alternée des colonnes de la matrice.

- Rappels : le déterminant d'une matrice est une forme linéaire alternée des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.

- Rappels : le déterminant d'une matrice est une forme linéaire alternée des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \det \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Rappels : le déterminant d'une matrice est une forme linéaire alternée des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \det \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Si $A, B \in M_n(K)$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

- Rappels : le déterminant d'une matrice est une forme linéaire alternée des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad-bc)^{-1} \det \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Si $A, B \in M_n(K)$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Le déterminant d'une matrice A dont les colonnes sont les vecteurs colonnes $v_1, \ldots, v_n$ représente le volume (avec un signe) du parallélépipède engendré par $v_1, \ldots, v_n$.

- Rappels : le déterminant d'une matrice est une forme linéaire alternée des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad-bc)^{-1} \det \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Si $A, B \in M_n(K)$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Le déterminant d'une matrice A dont les colonnes sont les vecteurs colonnes $v_1, \dots, v_n$ représente le volume (avec un signe) du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$.
- On a $\det(P^{-1}AP) = \det A$ pour toute matrice P inversible. Le déterminant est donc invariant par changement de base (on peut ainsi définir le déterminant d'un endomorphisme).

- La trace d'une matrice $A \in M_n(K)$ est la somme $\mathrm{tr}(A)$ de ses éléments diagonaux.

- La trace d'une matrice $A \in M_n(K)$ est la somme $\mathrm{tr}(A)$ de ses éléments diagonaux.
- Pour tout $P \in GL(n, K)$, on a $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$. $\longrightarrow$ permet de définit la trace d'un endomorphisme.

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle valeur propre) telle que $AX = \lambda X$.

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle valeur propre) telle que $AX = \lambda X$.
- Le spectre de A (noté $\mathrm{spec}(A)$,) c'est-à-dire ensemble des v.p. de A, coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A).$$ **Polynôme caractéristique**

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle valeur propre) telle que $AX = \lambda X$.
- Le spectre de A (noté $\mathrm{spec}(A)$,) c'est-à-dire ensemble des v.p. de A, coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A).$$ **Polynôme caractéristique**

- Pour toute valeur propre λ de A on note E_λ l'espace propre associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda \times I)$.

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle valeur propre) telle que $AX = \lambda X$.
- Le spectre de A (noté $\mathrm{spec}(A)$,) c'est-à-dire ensemble des v.p. de A, coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A). \qquad \textbf{Polynôme caractéristique}$$

- Pour toute valeur propre λ de A on note E_λ l'espace propre associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda \times I)$.
- Si $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} E_\lambda$ on dit que A est diagonalisable. Il est équivalent de dire qu'il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} est diagonale.

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle valeur propre) telle que $AX = \lambda X$.
- Le spectre de A (noté $\mathrm{spec}(A)$,) c'est-à-dire ensemble des v.p. de A, coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A).$$ **Polynôme caractéristique**

- Pour toute valeur propre λ de A on note E_λ l'espace propre associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda \times I)$.
- Si $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} E_\lambda$ on dit que A est diagonalisable. Il est équivalent de dire qu'il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} est diagonale.
- Les matrices d'une famille de matrices diagonalisables qui commutent sont diagonalisables dans une même base.

- Une matrice n'est pas toujours diagonalisable. Exemple typique : les matrices nilpotentes càd matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.

- Une matrice n'est pas toujours diagonalisable. Exemple typique : les matrices nilpotentes càd matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).

- Une matrice n'est pas toujours diagonalisable. Exemple typique : les matrices nilpotentes càd matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- **Cayley Hamilton :** Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.

- Une matrice n'est pas toujours diagonalisable. Exemple typique : les matrices nilpotentes càd matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- **Cayley Hamilton :** Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.
- **Polynôme minimal** : c'est le polynôme unitaire de plus bas degré $\mu_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mu_A(A) = 0$. Il divise tout polynôme qui annule A, en particulier le polynôme caractéristique.

- Une matrice n'est pas toujours diagonalisable. Exemple typique : les matrices nilpotentes càd matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- **Cayley Hamilton :** Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.
- **Polynôme minimal** : c'est le polynôme unitaire de plus bas degré $\mu_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mu_A(A) = 0$. Il divise tout polynôme qui annule A, en particulier le polynôme caractéristique.
- Si $\chi_A(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (T - \lambda)^{c_\lambda}$, $c_\lambda \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mu_A(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (T - \lambda)^{m_\lambda} \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant m_\lambda \leqslant c_\lambda.$$

- Une matrice n'est pas toujours diagonalisable. Exemple typique : les matrices nilpotentes càd matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- **Cayley Hamilton :** Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.
- **Polynôme minimal** : c'est le polynôme unitaire de plus bas degré $\mu_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mu_A(A) = 0$. Il divise tout polynôme qui annule A, en particulier le polynôme caractéristique.
- Si $\chi_A(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (T - \lambda)^{c_\lambda}$, $c_\lambda \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mu_A(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (T - \lambda)^{m_\lambda} \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant m_\lambda \leqslant c_\lambda.$$

- Les espace $\Gamma_\lambda = \ker(A - \lambda)^{m_\lambda}$ s'appellent les espaces caractéristiques de A.

- **Théorème de décomposition des noyaux** : On a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} \Gamma_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (A - \lambda)^{m_\lambda}.$$

- **Théorème de décomposition des noyaux** : On a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} \Gamma_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (A-\lambda)^{m_\lambda}.$$

- **Corollaire (Dunford-Schwartz) :** Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\begin{cases} A = S + N \\ SN = NS \end{cases} \quad \text{avec} \quad S \text{ diagonalisable}, \quad N \text{ nilpotente}.$$

En outre S et N sont des polynômes en A.

- **Théorème de décomposition des noyaux** : On a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} \Gamma_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} (A-\lambda)^{m_\lambda}.$$

- **Corollaire (Dunford-Schwartz) :** Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\begin{cases} A = S + N \\ SN = NS \end{cases} \quad \text{avec} \quad S \text{ diagonalisable}, \quad N \text{ nilpotente.}$$

En outre S et N sont des polynômes en A.

- **Décomposition de Jordan :** Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs ont des $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ sur la diagonale, des 1 sur la sur-diagonale et des 0 partout ailleurs (si ces blocs sont de taille 1 il n'y a pas de sur-diagonale). Pour tout $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ un tel bloc apparaît.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable.
- Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable (en base orthonormale).

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable.
- Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable (en base orthonormale).

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S + N$ précédente.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable.
- Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable (en base orthonormale).

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S + N$ précédente.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est toujours trigonalisable càd conjuguée à une matrice triangulaire supérieure.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable.
- Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable (en base orthonormale).

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S+N$ précédente.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est toujours trigonalisable càd conjuguée à une matrice triangulaire supérieure.
- L'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable.
- Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable (en base orthonormale).

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S + N$ précédente.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est toujours trigonalisable càd conjuguée à une matrice triangulaire supérieure.
- L'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
- Une famille de matrices qui commutent est trigonalisable dans une même base.

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots e^{\lambda_n})$.

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots e^{\lambda_n})$.
- Si A et B commutent $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ mais si elles ne commutent pas, c'est en général faux.

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots e^{\lambda_n})$.
- Si A et B commutent $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ mais si elles ne commutent pas, c'est en général faux.
- On a pour tout $P \in GL(n, \mathbb{R})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}.$$

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots e^{\lambda_n})$.
- Si A et B commutent $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ mais si elles ne commutent pas, c'est en général faux.
- On a pour tout $P \in GL(n, \mathbb{R})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}.$$

- $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

Sommaire

1 Plan M1-SD

2 Plan cours 1

3 Introduction

4 Rappels de topologie

5 Rappels d'algèbre linéaire

6 Rappels de calcul différentiel

Rappels de calcul différentiel

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \to F$.

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \to F$.

Definition

$f : U \to F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si $\exists$ appl. lin. continue $Df(x_0) : E \to F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : dérivée ou l'application linéaire tangente ou encore la différentielle de f en x_0.

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \to F$.

Definition

$f : U \to F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si $\exists$ appl. lin. continue $Df(x_0) : E \to F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : dérivée ou l'application linéaire tangente ou encore la différentielle de f en x_0.

Remarques

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \to F$.

Definition

$f : U \to F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si $\exists$ appl. lin. continue $Df(x_0) : E \to F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : dérivée ou l'application linéaire tangente ou encore la différentielle de f en x_0.

Remarques

- $o(\|v\|) = \|v\|\epsilon(v)$ où $\lim_{v\to 0} \epsilon(v) = 0$.

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \to F$.

Definition

$f : U \to F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si $\exists$ appl. lin. continue $Df(x_0) : E \to F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : dérivée ou l'application linéaire tangente ou encore la différentielle de f en x_0.

Remarques

- $o(\|v\|) = \|v\|\epsilon(v)$ où $\lim_{v\to 0} \epsilon(v) = 0$.
- Si elle existe, une telle application linéaire est unique.

E, F Banach, $U \subset E$, $x_0 \in U$, $f : U \to F$.

Definition

$f : U \to F$ différentiable (ou dérivable) en x_0 si $\exists$ appl. lin. continue $Df(x_0) : E \to F$ t.q.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

$Df(x_0)$: unique : dérivée ou l'application linéaire tangente ou encore la différentielle de f en x_0.

Remarques

- $o(\|v\|) = \|v\|\epsilon(v)$ où $\lim_{v \to 0} \epsilon(v) = 0$.
- Si elle existe, une telle application linéaire est unique.
- La continuité de l'appl. lin. $Df(x_0)$ est automatique en dimension finie.

Rappels de calcul différentiel

- L'appl. lin. $Df(x_0)$ continue (i.e $\|Df(x_0).v\|_F \leqslant C.\|v\|_E$) : *f continue* en x_0.

Rappels de calcul différentiel

- L'appl. lin. $Df(x_0)$ continue (i.e $\|Df(x_0).v\|_F \leqslant C.\|v\|_E$) : f *continue* en x_0.
- Si f est dérivable en tout point de U et si l'application $x \mapsto Df(x)$ (de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme d'opérateurs) est continue on dit que f est C^1.

- L'appl. lin. $Df(x_0)$ continue (i.e $\|Df(x_0).v\|_F \leqslant C.\|v\|_E$) : f *continue* en x_0.
- Si f est dérivable en tout point de U et si l'application $x \mapsto Df(x)$ (de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme d'opérateurs) est continue on dit que f est C^1.
- Si $x \mapsto Df(x)$ est dérivable sa dérivée est une application continue de E dans $L_c(E, F)$ qu'on note $D^2f(x)$. Elle s'identifie avec une application bilinéaire continue de $E \times E \to F$.

Rappels de calcul différentiel

- L'appl. lin. $Df(x_0)$ continue (i.e $\|Df(x_0).v\|_F \leqslant C.\|v\|_E$) : f *continue* en x_0.
- Si f est dérivable en tout point de U et si l'application $x \mapsto Df(x)$ (de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme d'opérateurs) est continue on dit que f est C^1.
- Si $x \mapsto Df(x)$ est dérivable sa dérivée est une application continue de E dans $L_c(E, F)$ qu'on note $D^2 f(x)$. Elle s'identifie avec une application bilinéaire continue de $E \times E \to F$.
- De la même façon on peut définir par récurrence la notion d'application de classe C^p ; $D^p f(x)$ est par nature une application p-linéaire continue de E^p dans F.

- $f : E \times F \to G$ t.q. pour $y \in F$ fixé l'application $E \to G$, $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable, on note $D_1 f(x, y)$ ou $\partial_x f(x, y)$ sa dérivée en x : dérivée partielle.

- $f : E \times F \to G$ t.q. pour $y \in F$ fixé l'application $E \to G$, $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable, on note $D_1 f(x,y)$ ou $\partial_x f(x,y)$ sa dérivée en x : dérivée partielle.
- En dimension finie, Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ est C^1, $Df(x)$ s'identifie avec la *matrice jacobienne* $Jf(x)$:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)\right)_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}.$$

- $f : E \times F \to G$ t.q. pour $y \in F$ fixé l'application $E \to G$, $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable, on note $D_1 f(x,y)$ ou $\partial_x f(x,y)$ sa dérivée en x : dérivée partielle.
- En dimension finie, Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$ est C^1, $Df(x)$ s'identifie avec la *matrice jacobienne* $Jf(x)$:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n)\right)_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}.$$

- En dim. quelconque si E, F, G EVN, U ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ f est de classe C^1 ssi toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.

- $f : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto A^2$;

- $f : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R}),\ A \mapsto A^2$;
  $Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R}),\ H \mapsto AH + HA$.

- $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}),\ A \mapsto A^2$;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}),\ H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}),\ A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;

- $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}),\ A \mapsto A^2$;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}),\ H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}),\ A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}),\ H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.

- $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}),\ A \mapsto A^2$;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}),\ H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}),\ A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}),\ H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
- det : $M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \det(A)$ est C^1 ;

- $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^2$;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
- det : $M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ est C^1 ;
  $D\det(A) : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $H \mapsto \mathrm{tr}(Co(A)^T H)$ où $Co(A)^T =$ transposée de la co-matrice de A.

- $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^2$;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $H \mapsto AH + HA$.
- $f : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ est C^1 ;
  $Df(A) : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
- $\det : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ est C^1 ;
  $D\det(A) : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $H \mapsto \mathrm{tr}(Co(A)^T H)$ où $Co(A)^T =$ transposée de la co-matrice de A.
- Exemple en dimension infinie : $\Phi : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
  $\Phi : u \mapsto \int_0^1 K(\cdot, y, u(y))dy$ de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ est C^1 si K est elle-même C^1.

- Composition $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$

- Composition $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- Accroissements finis : Si U est un ouvert **convexe**, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.

- Composition $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- Accroissements finis : Si U est un ouvert **convexe**, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.
- Théorème de Schwarz : Si f est p-fois dérivable $D^p f(x)$ est une application p-linéaire symétrique.

- Composition $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- Accroissements finis : Si U est un ouvert **convexe**, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.
- Théorème de Schwarz : Si f est p-fois dérivable $D^p f(x)$ est une application p-linéaire symétrique.
- Formules de Taylor (reste intégral) Si U est un ouvert convexe et $f : U \to F$ est de classe C^{p+1} ; alors,

$$f(b) - f(a) - Df(a).(b-a) - \cdots \frac{1}{p!} Df^{(p)}(a).((b-a))^p = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} Df^{(p+1)}(a + t(b-a)).((b-a))^{p+1} dt.$$

- Composition $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- Accroissements finis : Si U est un ouvert **convexe**, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.
- Théorème de Schwarz : Si f est p-fois dérivable $D^p f(x)$ est une application p-linéaire symétrique.
- Formules de Taylor (reste intégral) Si U est un ouvert convexe et $f : U \to F$ est de classe C^{p+1} ; alors,

$$f(b) - f(a) - Df(a).(b-a) - \cdots \frac{1}{p!} Df^{(p)}(a).((b-a))^p =$$
$$\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} Df^{(p+1)}(a + t(b-a)).((b-a))^{p+1} dt.$$

- L'espace $C^p(U, F)$ muni de la norme $\|f\|_p = \max_{0 \leqslant k \leqslant p} \sup_{x \in U} \|D^k f(x)\|$ est un espace de Banach