M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

Chapitre 9
Flots, champs de vecteurs,
application de premier retour,
application à la stabilité.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire du chapitre 8

Nous passons à l'étude plus géométrique des équations diifférentielles. Nous supposerons que :

- $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^k ($k \geqslant 1$) et vérifie donc les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et du théorème de dépendance différentiable.
- X est complet c'est-à-dire que pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'équation différentielle
$$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \tag{1}$$
admet une solution (donc unique) définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On dira parfois que X est un champ de vecteurs dépendant du temps, mais on préfère réserver la terminologie champ de vecteurs au cas où X ne dépend pas de t.

L'outil fondamental dans la suite est le théorème de dépendance différentiable (plus particulièrement par rapport aux conditions initiales) et de linéarisation.

Théorème (Théorème de dépendance différentiable et linéarisation)

Supposons $f \in C^k(\Omega \times \Lambda, E)$ et soit y_0 la solution du problème $(P.C.)_{\lambda_0, v_0}$. Il existe alors un voisinage $\mathcal{W}$ de $(\lambda_0, v_0) \in \Lambda \times E$ tel que pour tout $(\lambda, v) \in \mathcal{W}$, le problème $(P.C.)_{\lambda, v}$ admette une unique solution $y_{\lambda, v}(\cdot)$ définie sur $[t_0, t_1]$ et l'application $(\lambda, v) \mapsto y_{\lambda, v}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ est de classe C^k. Son application linéaire tangente en (λ_0, v_0), $(D_{v,\lambda} y)(v_0, \lambda_0)$ est l'application qui à $(\Delta v, \Delta\lambda) \in E \times \Lambda$ associe $\Delta y(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ solution de l'équation différentielle affine

$$\begin{cases} (\Delta y)'(t) & = D_y f(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta y(t) + D_\lambda f(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta\lambda \\ \Delta y(t_0) & = \Delta v. \end{cases}$$

- D'après le théorème de dépendance différentiable par rapport à le condition initiale, l'application $\phi^{t,t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, qui à x_0 associe la valeur au temps t de l'unique solution de (1) telle que $x(t_0) = x_0$ est une application de classe C^k.
$$\forall\ t_0, t \in \mathbb{R},\ \phi^{t,t_0}(x(t_0)) = x(t) \iff x(\cdot) \text{ solution de (1)}$$
- D'après le théorème d'existence et d'unicité on a pour tous t_0, t_1, t_2
$$\phi^{t_2,t_0} = \phi^{t_2,t_1} \circ \phi^{t_1,t_0} \tag{Chasles}$$
- $\phi^{t,t_0}(\cdot)$ est un C^k-difféomorphisme : l'application ϕ^{t,t_0} est inversible, d'inverse $\phi^{t_0,t}$ qui est aussi de classe C^k.
- On dit que ϕ^{t,t_0} est le flot de X.

Le flot est l'analogue non-linéaire de la résolvante et partage beaucoup de ses propriétés (les preuves sont les mêmes) :

- Si X ne dépend pas de t on a $\phi^{t,t_0} = \phi^{t-t_0,0}$; on notera ϕ^t à la place de $\phi^{t,0}$. On a alors (analogue de l'exponentielle)
$$\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}.$$
- Si X dépend de façon T-périodique de t on a (comme pour la résolvante)
$$\phi^{t+T,t_0+T} = \phi^{t,t_0}$$
et aussi
$$\phi^{t+T,t} = \phi^t \circ \phi^{T,0} \circ \phi^{-t}.$$

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes
Flots

- Evidemment quand $X(t,x) = A(t)x$ est linéaire on a $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x$.
- Si $X(t,x) = A(t)x + b(t)$ est affine on a d'après la formule de variation de la constante $\phi^{t,t_0}(x) = R(t,t_0)x + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds$.
- Le flot permet de caractériser facilement les orbites périodiques : $x(t)$ est une solution T-périodique ssi $\phi^T(x) = x$.
- Point singulier : si $X(x_0) = 0$ alors, $x(\cdot) \equiv x_0$ est solution et $\phi^t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est un point singulier (ou point d'équilibre) de X (si $X(x_0) \neq 0$ on dit que x_0 est régulier).
- On appelle orbite (resp. orbite positive, après le temps t) de $x_0 \in \Omega$ l'ensemble $\mathcal{O}(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ (resp. $\mathcal{O}^+(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \geqslant 0\}$, $\mathcal{O}^{\geqslant t}(x_0) = \{\phi^s(x_0) : s \geqslant t\}$)

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes
Différentielle du flot et équation linéarisée

Une application immédiate du théorème de dépendance différentiable par rapport à la condition initiale et du théorème de linéarisation montre que

Proposition

Si $R(t,t_0)$ est la résolvante de l'équation linéarisée le long de $x_0(t)$:

$$v'(t) = DX(t, x_0(t)) \cdot v(t)$$

on a

$$D\phi^{t,t_0}(x_0) = R(t,t_0).$$

Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes
Flots

La notion de flot permet de ramener l'étude d'une E.D.O. à celle plus géométrique d'une famille de difféomorphismes et parfois à celle d'un seul difféomorphisme.
Mais en général, l'étude de la dynamique (l'itération de compositions) d'un difféomorphisme n'est pas forcément plus simple que celle d'un champ de vecteurs.
Sauf si la dimension de l'espace dans lequel agit ce difféomorphisme est plus petite que celle de l'espace des phases.
Un exemple de telle réduction est donné par la construction de l'application de premier retour Poincaré.

Sommaire du chapitre 8

Soient $X(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ($\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$) un champ de vecteurs (indépendant du temps), $x_0 \in \Omega$ et Σ un ouvert d'un hyperplan (dimension $n-1$) $\tilde{\Sigma}$ affine contenant x_0 et tel que $\mathbb{R}X(x_0) \oplus \tilde{\Sigma} = \mathbb{R}^n$: on dit que la section Σ ($x_0 \in \Sigma$) est transverse à l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ de x_0 en x_0. Nous dirons que τ_0 (s'il existe) est le temps de premier retour de x_0 sur Σ si

$$\tau_0 = \min\{t > 0 : \phi^t(x_0) \in \Sigma\}$$

(à cause de l'hypothèse de transversalité $\tau_0 > 0$, l'inf est un min). On dit alors que

$$\phi^{\tau_0}(x_0) \text{ est le premier retour de } x_0 \text{ sur } \Sigma.$$

Supposons alors qu'un tel temps de premier retour τ_0 de x_0 sur Σ existe et que Σ soit transverse à l'orbite de x_0 au point $\phi^{\tau_0}(x_0)$.

Théorème

Sous les hypothèses précédentes,

- *il existe un voisinage ouvert $W = U \cap \Sigma$ de x_0 dans Σ (donc U ouvert de Ω contenant x_0) et une application $\tau : W \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que pour tout $u \in W$, $\tau(u)$ soit le temps de premier retour de u sur Σ.*
- *L'application $P : W \to \Sigma$ définie par $P(u) = \phi^{\tau(u)}(u)$ qui est évidemment de classe C^k s'appelle l'application de premier retour de Poincaré. Elle réalise un difféomorphisme de W sur son image.*
- *Si $X_\epsilon(\cdot)$ dépend d'un paramètre ϵ de façon C^k, alors pour ϵ petit, W peut-être choisi de façon uniforme en ϵ et on peut définir pour (X_ϵ, Σ) des applications de temps de premier retour τ_ϵ et de premier retour P_ϵ pour X_ϵ qui dépendent de façon C^k en ϵ.*

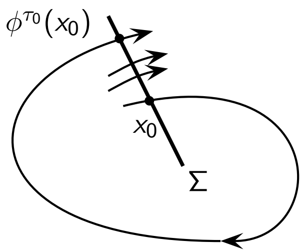

FIGURE: L'application de Poincaré : $P(x_0) = \phi^{\tau_0(x_0)}$

Démonstration : (i) On note $x_1 = \phi^{\tau_0}(x_0)$, p_1 la projection sur $X(x_1)$ parallèlement à Σ et $\tilde{p}$ la projection sur Σ parallèlement à $X(x_1)$. Notons $\psi : \mathbb{R} \times \Sigma \to \mathbb{R}$ l'application à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage de $(\tau_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ par $\psi(t, u) = p_1(\phi^t(u))$.

$$\psi(t, u) = 0 \iff \phi^t(u) \in \Sigma$$

On a, $\psi(\tau_0, x_0) = 0$, et $\partial_t \psi(\tau_0, x_0) = p_1(X(\phi^{\tau_0}(x_0)) = 1$.
On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites : il existe τ de classe C^k définie sur un voisinage $V \supset]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[\times B_\Sigma(x_0) \subset \mathbb{R} \times \Sigma$ de (τ_0, x_0) tel que

$$(t, u) \in V \text{ et } \psi(t, u) = 0 \iff t = \tau(u) \text{ et } \tau \in]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[.$$

(ii) τ est bien le temps de premier retour.
En effet, la partie précédente montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in B_\Sigma(x_0) \subset \Sigma$, $\tau(x)$ est le seul temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour lequel $\phi^t(x) \in \Sigma$.
S'il existe un autre temps $t_1(x) < \tau(x)$ tel que $\phi^{t_1(x)}(x) \in \Sigma$ on a donc $t_1(x) < \tau_0 - \delta$.
S'il existait une infinité de tels $x \in \Sigma$ on aurait une suite $x_n \to x_0$, $x_n \in \Sigma$ et $0 < t_n < t_0 - \delta$ tels que $\phi^{t_n}(x_n) \in \Sigma$.
Quitte à extraire une sous-suite, cela donnerait un $t_* \leqslant t_0 - \delta$ tel que $\phi^{t_*}(x_0) \in \Sigma$.
Cela contredit la minimalité de τ_0.

(iii) Calculons la différentielle de $P : \Sigma \to \Sigma$ définie au voisinage de u_0 par $P(u) = \tilde{p}(\phi^{\tau(u)}(u))$.

$$\begin{aligned} DP(x_0) &= \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)))D\tau(x_0) + \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma} \\ &= \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma} \quad (\text{car } \tilde{p}(X(\phi^{\tau_0}(x_0)) = 0). \end{aligned}$$

L'application $DP(u_0) : \Sigma \to \Sigma$ est injective car sinon, il existerait $v \in \Sigma$ tel que $DP(x_0) \cdot v = 0$ c'est-à-dire $D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot v \in \mathbb{R}X(x_1)$; mais $D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot X(x_0) = X(x_1)$ (différencier en $s = 0$ l'expression $\phi^{\tau_0}(\phi^s(x_0)) = \phi^s(x_1)$) ; on aurait alors $v \in \mathbb{R}X(x_0)$: contradiction.
Le théorème d'inversion locale s'applique.
La partie sur la dépendance C^k en ϵ ne pose pas de problème. □

Des relations
$DP(x_0) = \tilde{p} \circ D\phi^{\tau_0}(x_0)_{|\Sigma}$, $\quad D\phi^{\tau_0}(x_0) \cdot X(x_0) = X(\phi^{\tau_0}(x_0))$
on tire davantage d'information sur P

Théorème

Si $\phi^t_X(x_0)$ est τ_0-périodique, la différentielle $DP(x_0)$ dans une base dont le premier vecteur est $X(x_0)$ et dont les autres sont dans Σ est reliée à celle de $D\phi^{\tau_0}_X(x_0)$ par

$$D\phi^{\tau_0}_X(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & DP(x_0) \end{pmatrix}.$$

Remarque : On a vu auparavant que $D\phi^{\tau_0}_X(x_0) = R(\tau_0, 0)$ où R est la résolvante du système linéarisé $v'(t) = DX(\phi^t(x_0)) \cdot v(t)$ (le long de l'orbite de x_0)

Supposons que $x_0(\cdot)$ soit une solution T-périodique de $\dot{x}(t) = X(x(t))$.
Notons $\mathcal{O}(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ (resp. $\mathcal{O}^+(x_0) = \{\phi^t(x_0) : t \geqslant 0\}$, $\mathcal{O}^{\geqslant t}(x_0) = \{\phi^s(x_0) : s \geqslant t\}$) l'orbite (resp. positive, après le temps t) de x_0 , Σ un (ouvert d'un) hyperplan transverse à $X(x_0)$ en $x_0 = x_0(0)$ et notons P l'application de premier retour de Poincaré définie au voisinage de x_0. On a $P(x_0) = x_0$ et on veut connaître le comportement des orbites proches.

Proposition

Si pour tout $x \in W$, $P^n(x) \to x_0$ quand $n \to \infty$ alors $\mathrm{dist}(\mathcal{O}^{\geqslant t}(x), \mathcal{O}(x_0)) \to 0$ quand $t \to \infty$. On dit que $\mathcal{O}(x_0)$ est une orbite périodique attractive.

Démonstration : Notons $x_k = P^k(x)$. On a $P^n(x) = \phi^{\tau_n}(x)$ où

$$\tau_n = \tau(x) + \tau(x_1) + \cdots + \tau(x_n).$$

Comme $\tau(y)$ est proche de $\tau(x_0) = \tau_0$, pour y proche de x_0 on a $\tau_n \geqslant n(\tau_0 - \epsilon)$ pour $\epsilon >$ petit.
Donc $\tau_n \to \infty$. En outre, $\tau_n - \tau_{n-1}$ est borné par $\tau_0 + \epsilon$ et le théorème de dépendance continue des orbites montre que
$\max_{s \in [\tau_{n-1}, \tau_n]\}} \|\phi^s(x) - \phi^s(x_0)\|$ tend vers zero avec $\|x_{n-1} - x_0\|$. □

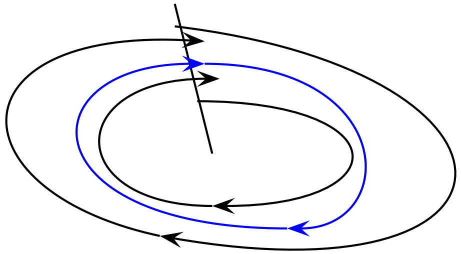

FIGURE: Orbite périodique attractive

Comment vérifier l'hypothèse de la proposition précédente ?
Le difféomorphisme $P : \Sigma \to \Sigma$ au voisinage de x_0 s'écrit
$P(x) = x_0 + DP(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2)$.
On doit étudier la dynamique (l'itération) de ce difféomorphisme.
C'est facile en dimension 1 (donc si $\dim \Sigma = 1$ c.-à-d. $n = 2$), au moins si $DP(x_0) = P'(x_0)$ (le multiplicateur) est différent de ± 1.
En effet, posons $\lambda = P'(x_0)$ et supposons $|\lambda| < 1$.
Si on pose $u_n = |P^n(x) - x_0|$, on a pour

$$u_{n+1} \leqslant \lambda u_n + O(u_n^2).$$

Il est facile de voir que si u_0 est suffisamment petit on a pour un $\epsilon > 0$ assez petit

$$u_{n+1} \leqslant (\lambda + \epsilon) u_n$$

et donc u_n converge exponentiellement vite vers 0 (car $|\lambda + \epsilon| < 1$).

En dimension plus grande, on dispose du critère suivant

Proposition

Si toutes les valeurs propres de $DP(x_0)$ sont de module < 1, alors pour tout x suffisamment proche de x_0, $P^n(x)$ converge vers x_0 exponentiellement vite quand $n \to \infty$.

Démonstration. Il existe une norme N sur Σ et $0 \leqslant \lambda < 1$ tel que

$$\forall v \in \Sigma,\ N(DP(x_0) \cdot v) \leqslant \lambda N(v).$$

Il suffit en effet de prendre

$$N(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|DP^k(x_0) \cdot v\|}{\lambda^k}$$

pour $\lambda <$ rayon spectral$(DP(x_0)) < 1$.
On a, comme en dimension 1, $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n + O(u_n^2)$ si on pose $u_n = N(P^n(x) - x_0)$. $\square$