M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

Chapitre 6
EDO à coefficients périodiques, Résonance paramétrique

Sommaire Plan du cours 3

E.D.O. linéaires périodiques

On suppose à présent que $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$ est T-périodique, c.-à-d.

$$A(\cdot + T) = A(\cdot)$$

et on se propose de voir dans quelle mesure cette information supplémentaire nous renseigne sur la résolvante de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$.

E.D.O. linéaires périodiques : propriétés de la résolvante

Théorème

Si $A(\cdot)$ est T-périodique alors,

i) *pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a ,*

$$R_A(t_2 + T, t_1 + T) = R_A(t_2, t_1);$$

ii) *pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$R_A(t + T, t) = R_A(t, 0)R(T, 0)R_A(t, 0)^{-1}.$$

E.D.O. linéaires périodiques : propriétés de la résolvante

Démonstration

Montrons i) : Soient $v \in \mathbb{K}^n$, $X(\cdot)$ la solution de $X'(t) = A(t)X(t)$ telle que $X(t_1) = v$ et $Y(\cdot) := X(\cdot - T)$:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= X'(t-T) = A(t-T)X(t-T) \\ &= A(t)Y(t) \quad (A \text{ est } T\text{-périodique.}) \end{aligned}$$

Donc $X(\cdot), Y(\cdot) \in \mathcal{E}_A$.

$$\begin{aligned} X(t_2) &= R_A(t_2, t_1)X(t_1) = R_A(t_2, t_1).v \\ Y(t_2 + T) &= R_A(t_2 + T, t_1 + T).Y(t_1 + T) = R_A(t_2 + T, t_1 + T).v \end{aligned}$$

$$X(t_2) = Y(t_2 + T) \Longrightarrow R_A(t_2, t_1).v = R_A(t_2 + T, t_1 + T).v$$

C'est vrai pour tout v donc $R_A(t_2, t_1) = R_A(t_2 + T, t_1 + T)$

E.D.O. linéaires périodiques : propriétés de la résolvante

Montrons ii) : on a

$$R_A(t+T, t) = R_A(t+T, T).R(T, 0).R(0, t),$$

d'après i)

$$R_A(t+T, T) = R_A(t, 0),$$

d'où

$$\begin{aligned} R_A(t+T, t) &= R_A(t, 0).R(T, 0).R(0, t) \\ &= R_A(t, 0).R(T, 0).R_A(t, 0)^{-1}. \end{aligned}$$

□

E.D.O. linéaires périodiques : le théorème de Floquet

Théorème (de Floquet)

Soit $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ T-périodique. Il existe alors une matrice $A_0 \in M_n(\mathbb{K})$ et une fonction $P \in C^k(\mathbb{R}, Gl(n, \mathbb{K}))$ T-périodique si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (resp. $2T$-périodique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) telles que pour tous $t, t_0 \in \mathbb{R}$,

$$R_A(t, 0) = P(t)e^{tA_0}.$$

On a

$$e^{TA_0} = R_A(T, 0), \qquad (\text{resp. } e^{2TA_0} = R_A(2T, 0)).$$

E.D.O. linéaires périodiques : le théorème de Floquet

Démonstration

En utilisant la décomposition $S + N$ on peut démontrer que pour toute matrice $R \in GL(n, \mathbb{C})$ (resp. $R \in GL(n, \mathbb{R})$) (inversible) il existe $A \in M(n, \mathbb{C})$ telle que $e^A = R$ (resp. $e^{2A} = R^2$).
Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est similaire). Il existe A_0 tel que $e^{A_0} = R(T, 0)$.
Posons $P(t) = R(t, 0)e^{-tA_0}$.
$P(\cdot)$ est T-périodique :

E.D.O. linéaires périodiques : le théorème de Floquet

En effet,

$$
\begin{aligned}
P(t+T) &= R(t+T,0)e^{-(t+T)A_0} \\
&= R(t+T,T)R(T,0)e^{-TA_0}e^{-tA_0} \\
&= R(t,0)R(T,0)e^{-TA_0}e^{-tA_0} \\
&= R(t,0)e^{-tA_0} \\
&= P(t)
\end{aligned}
$$

□

E.D.O. linéaires périodiques : le théorème de Floquet

Remarques :

- L'expression $R_A(t,0) = P(t)e^{tA_0}$ signifie que $X(\cdot)$ est solution de $X'(t) = A(t)X(t)$ ssi $Y(\cdot) = P(\cdot)^{-1}X(\cdot)$ est solution de l'équation linéaire à coefficients *constants* $Y'(t) = A_0 Y(t)$.
- Si $A(\cdot)$ est à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$ tout ce qui précède reste vrai en remplaçant $M_n(\mathbb{R})$ par $sl(2,\mathbb{R})$ et $Gl(n,\mathbb{R})$ par $SL(2,\mathbb{R})$.
- Une conséquence de Floquet et de ce que l'on a vu sur les E.D.O à coeff. constants est que l'on peut décrire la forme des solutions d'une EDO à coefficients périodiques :

E.D.O. linéaires périodiques : le théorème de Floquet

Proposition

Les coefficients de toute solution d'une équation $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ où $A(\cdot)$ est T-périodique sont des sommes finies de fonctions de la forme $a_{p,q}(t)t^p e^{t\lambda_q}$ où $a(\cdot)$ est T-périodique (à valeurs complexes) , $0 \leqslant p \leqslant n$ et λ_q sont les valeurs propres de A_0 (les exposants de Floquet).

Sommaire Plan du cours 3

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Problème : On considère $A(\cdot) \in C^0(I, M(n,\mathbb{K}))$, T-périodique ($A(\cdot + T) = A(\cdot)$) et on se propose d'étudier la stabilité du système

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

L'origine est-elle

- asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) ? : pour tout $X(0)$ dans un voisinage de 0 $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$?
- stable ? c'est-à-dire $\forall \epsilon > 0, \exists \delta, |X(0)| < \delta \implies \forall t \geqslant 0, |X(t)| < \epsilon$?
- instable ? Pour certaines conditions initiales arbitrairement proches de 0, les solutions sortent de tout voisinage de 0 prescrit à l'avance.

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

D'après le théorème de Floquet on sait qu'il existe

- $A_0 \in M(n,\mathbb{K})$ telle que $e^{TA_0} = R_A(T,0)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (resp. $e^{2TA_0} = R_A(2T,0)$)
- $P \in C^1(\mathbb{R}, GL(n,\mathbb{K}))$, T-périodique si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (resp. $2T$-périodique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

telles que

$$R_A(t,0) = P(t)e^{tA_0}.$$

Ainsi

$$X(t) = P(t)e^{tA_0}X(0).$$

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $P(\cdot)$ est périodique et inversible on a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \max(\|P(t)\|, \|P(t)^{-1}\|) < \infty$$

et donc

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = 0 \iff X(0) \in \Gamma^s(A_0)$$
$$\lim_{t\to-\infty} X(t) = 0 \iff X(0) \in \Gamma^u(A_0)$$
$$\exists\ M,\ C,\ \forall\ t,\ \|X(t)\| \leqslant C(1+|t|)^M\|X(0)\| \iff X(0) \in \Gamma^c(A_0)$$

où $\mathbb{K}^n = \Gamma^s(A_0) \oplus \Gamma^u(A_0) \oplus \Gamma^c(A_0)$, $\Gamma^{s,u,c}(A_0)$ étant les espaces stable, instable, central de A_0.

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

La stabilité du système $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ se lit donc sur A_0 ou de façon équivalente sur $R_A(T,0)$ (ou plus précisément sur leurs valeurs propres) :

- 0 est asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ $\Gamma_u(A_0) = \Gamma_c(A_0) = \emptyset \iff$ toutes les valeurs propres de A_0 sont de parties réelles strictement négatives.
- 0 est stable (en $t \to +\infty$) $\iff \Gamma_u(A_0) = \emptyset$ et $M = 0 \iff$ toutes les valeurs propres de A_0 sont de partie réelle négative et A_0 est diagonalisable en celles de partie réelle nulle.
- 0 est instable $\iff A_0$ a au moins valeur propre de partie réelle strictement positive ou une valeur propre de partie réelle nulle où elle n'est pas diagonalisable.

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $e^{TA_0} = R_A(T,0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T,0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T,0)$ son reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Proposition

- *0 est asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ toutes les valeurs propres de $R_A(T,0)$ sont de module < 1.*
- *0 est stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ toutes les valeurs propres de $R_A(T,0)$ sont de module $\leqslant 1$ et $R_A(T,0)$ est diagonalisable en celles de module 1.*
- *0 est instable $\iff$ au moins une des valeurs propres de $R_A(T,0)$ est de module > 1 ou est de module 1 mais $R_A(T,0)$ n'y est pas diagonalisable.*

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Si l'on suppose à présent que A_ϵ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, par exemple

$$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot).$$

On sait alors, d'après le théorème de dépendance par rapport au paramètre, que $R_{A_\epsilon}(T,0)$ dépend continûment (ou C^k) de ϵ.
Or, les valeurs propres d'une matrice dépendent continûment de la matrice.
Donc, les propriétés "R_{A_ϵ} a toutes ses valeurs propres de module < 1" ou "R_{A_ϵ} a au moins une valeur propre de module > 1" sont ouvertes (ont lieu pour un ensemble ouvert de paramètres).
Conclusion :

Proposition

La propriété "être asymptotiquement stable en $t \to \infty$ (resp. $t \to -\infty$)" est robuste c'est-à-dire ouverte dans l'espace des paramètres.

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.
Mais, dans les problèmes qui proviennent de la Physique, les E.D.O. que l'on obtient ont souvent une structure supplémentaire ("hamiltonienne") liée à la conservation de l'énergie et les matrices qui apparaissent sont "symplectiques".
L'exemple le plus simple de matrices symplectiques se trouve en dimension 2 : ces matrices s'identifient à l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels et de trace nulle $sl(2,\mathbb{R})$ (resp. de déterminant 1 : $SL(2,\mathbb{R})$).

La résonance paramétrique
"Rappels" sur $SL(2,\mathbb{R})$

Les v.p. de $R \in SL(2,\mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \mathrm{tr}(R)\rho + 1 = 0$.
Discriminant $\Delta = \mathrm{tr}(R)^2 - 4$.
On définit

- $E_s(R) := \{v \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n\to\infty} \|R^n \cdot v\| = 0\}$
- $E_u(R) := \{v \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n\to-\infty} \|R^n \cdot v\| = 0\}$
- $E_c(R) := \{v \in \mathbb{R}^2 : \exists C\ \forall n \in \mathbb{R},\ \|R^n \cdot v\| \leqslant C(1+|n|)\|v\|\}$.

Equations linéaires à coefficients constants
Exemples en dimension 2

Si $|\text{tr}(R)| < 2$:

- deux v.p. sur le cercle unité $e^{\pm i\omega}$
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(R)$;
- toutes les orbites se situent sur des ellipses : R est elliptique.
- L'origine est stable.
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que $R = P \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} P^{-1}$
- Il existe $A \in sl(2, \mathbb{R})$, det $A > 0$ telle que $R = e^A$

Equations linéaires à coefficients constants
Exemples en dimension 2

Si $|\text{tr}(R)| > 2$:

- deux v.p. réelles inverses l'une de l'autre $e^{\pm\omega}$;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_s(A) \oplus \Gamma_u(A)$ où $\Gamma_s = \mathbb{R}v_s$, $\Gamma_u = \mathbb{R}v_u$.
- Les orbites se situent sur des hyperboles : R est hyperbolique
- L'origine est instable.
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que $R = P \begin{pmatrix} e^{\omega} & 0 \\ 0 & e^{-\omega} \end{pmatrix} P^{-1}$
- Il existe $A \in sl(2, \mathbb{R})$, det $A < 0$ telle que $R^2 = e^{2A}$

Equations linéaires à coefficients constants
Exemples en dimension 2

Si $|\text{tr}(R)| = 2$:

- deux v.p. égales à 1 ou égales à -1 ;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$ mais R est unipotente d'ordre 2 ou égale à $\pm Id$
- R est dite parabolique
- L'origine est instable si $a \neq 0$ (stable sinon).
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $R = P \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} P^{-1}$
- Il existe $A \in sl(2, \mathbb{R})$, det $A = 0$ telle que $R^2 = e^{2A}$

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $R_A(T, 0) = e^{TA}$ ou $R_A(T, 0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$, est stable si et seulement si il est elliptique $|tr(R_A(T, 0))| < 2$ ou si $R_A(T, 0) = \pm I$.

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

La nouveauté dans le cas où $A(\cdot)$ est à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$: est

Théorème

L'ensemble des matrices elliptiques de $SL(2,\mathbb{R})$ est ouvert dans $SL(2,\mathbb{R})$.

On a donc par le théorème de dépendance continue par rapport aux paramètres :

Corollaire

L'ensemble des $A \in C^0_{T-per}(\mathbb{R}, sl(2,\mathbb{R}))$ pour lesquels $X'(t) = A(t)X(t)$ est elliptique est ouvert (dans $C^0_{T-per}(\mathbb{R}, sl(2,\mathbb{R}))$).

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Conséquences pour
$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \qquad (PP)_\epsilon$:

- Si $e^{TA} \in SL(2,\mathbb{R})$ est hyperbolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine reste un point d'équilibre instable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2,\mathbb{R})$ est elliptique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| < 2$), l'origine reste un point d'équilibre stable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2,\mathbb{R})$ est parabolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| = 2$) : tout peut arriver !

La résonance paramétrique
Exemples

Considérons
$$\ddot{x}(t) + (a + \epsilon\cos(\frac{2\pi t}{T}))x(t) = 0,$$
qui se récrit
$$\dot{X}(t) = (A + \epsilon F(t))X(t)$$
avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \epsilon\cos(\frac{2\pi t}{T})\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Si $a > 0$ on écrit $a = \omega^2$ et on a
$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \frac{\sin(t\omega)}{\omega} \\ -\omega\sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}$$

La résonance paramétrique
Exemples

Donc

Proposition (Résonance paramétrique)

$$e^{TA} \text{ elliptique} \iff |tr(e^{TA})| < 2 \iff \omega \notin \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$$

et dans ce cas il existe $\epsilon_\omega > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (-\epsilon_\omega, \epsilon_\omega)$ le système associé à $A + \epsilon F(\cdot)$ est stable.

En revanche, si $\omega = \omega_k := k\frac{\pi}{T}$ (on dit que le système est résonant), la méthode des perturbations, permet de calculer le développement limité de $R_{A_\epsilon}(T, 0)$ et donc de sa trace et de montrer qu'il existe dans le plan (ω, ϵ) une zone d'instabilité d'intérieur non vide dont l'adhérence contient $(\omega_k, 0)$.

La résonance paramétrique
Exemples

Pour $\ddot{x} + (a + \epsilon \cos(2t))x = 0$ ($T = \pi$, $a = \omega^2$ si $a > 0$).
Rouge : instable (hyperbolique) Bleu : parabolique Orange : stable (elliptique)

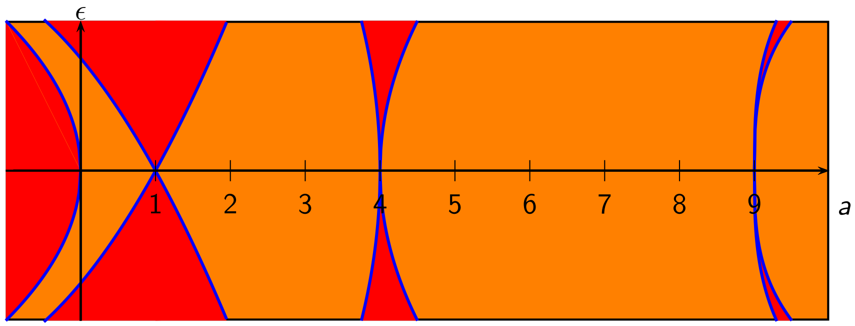

FIGURE: Zones de stabilité-instabilité

La résonance paramétrique
Exemples de la Physique

- Pendule de Kapitsa : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.
- Piégeage des ions (Nobel 1989, Dehmelt, Paul) : Dans un champ électrique (quadrupôle) oscillant : même principe que le pendule de Kapitsa.
- Propriétés métal-isolant (physique du solide) : Equation stationnaire de Schrödinger 1D, potentiel périodique. $-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$. Les solutions physiquement acceptables sont celles pour lesquelles ψ est bornée. Le spectre de l'opérateur associé a une structure de bandes.