M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

Chapitre 5
EDO linéaires dépendant du temps
Résolvante
Variation de la constante
Théorie des perturbations

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire Plan du chapitre 5

Equations linéaires dépendant du temps

Nous étudions les E.D.O. affines de la forme

$$\begin{cases} \dot X(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$ (I intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Auparavant nous nous concentrons sur les équations linéaires

$$\begin{cases} \dot X(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Equations linéaires dépendant du temps

La résolvante

L'espace $\mathcal{E}_{A(\cdot)}$ des $X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ solutions de

$$\dot X(t) = A(t)X(t)$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
C'est un espace vectoriel de dimension finie égale à n : en effet, l'application $\mathbb{K}^n \to \mathcal{E}_{A(\cdot)}$ qui à $X_0 \in \mathbb{K}^n$ associe la solution de

$$\begin{cases} \dot X(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

est un isomorphisme ; cela découle de la linéarité et du théorème d'existence et d'unicité globales des solutions.

La résolvante

Définition

On appelle résolvante de l'E.D.O. $\dot X(t) = A(t)X(t)$ (ou encore de $A(\cdot)$) entre s et t ($s, t \in I$) l'application linéaire $R_A(t,s) \in GL(n, \mathbb{K})$ qui à $v \in \mathbb{K}^n$ associe la valeur au temps t de la solution $X \in \mathcal{E}_{A(\cdot)}$ pour laquelle $X(s) = v$. En d'autres termes,

$$X(\cdot) \in \mathcal{E}_A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, t, s \in I, \quad X(t) = R_A(t,s)X(s).$$

La connaissance de $R(t,s)$ est équivalente à celle d'un système fondamental de solutions (S.F.S.) c.-à-d. d'une base $(X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot))$ de $\mathcal{E}_A$. En effet, si $V(t)$ est la matrice $n \times n$ dont les colonnes sont les $X_i(\cdot)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$R_A(t,s) = V(t)V(s)^{-1}.$$

Propriétés de la résolvante

(1) (Chasles) : pour $t_1, t_2, t_3 \in I$ on a

$$R_A(t_3, t_1) = R_A(t_3, t_2)R_A(t_2, t_1)$$

(En particulier, $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)^{-1}$.)

(2) Pour t_0 fixé, $t \mapsto R_A(t, t_0)$ vérifie l'équation différentielle matricielle (attention l'espace des phases est $M(n, \mathbb{K})$)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} R_A(t, t_0) = A(t)R_A(t, t_0) \\ R_A(t_0, t_0) = I \end{cases}$$

Propriétés de la résolvante

(3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles ou complexes) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$.

(4) (Cas constant) Si $A(\cdot) \equiv$ *constante* on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)

(5) (Liouville) On a

$$\det R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s))ds}$$

(6) (Groupes et algèbres de Lie) Soit $U \in GL(n, \mathbb{K})$. Si $A(\cdot)$ est à valeurs dans (l'algèbre de Lie) $\mathfrak{g}_U = \{M \in M(n, \mathbb{K}) : {}^tMU + UM = 0\}$ alors $R_A(\cdot, t_0)$ est à valeurs dans le groupe (de Lie) $G_U = \{P \in GL(n, \mathbb{K}) : {}^tPUP = U\}$.

Propriétés de la résolvante

Pour démontrer (5) on procède de la façon suivante : on sait que la dérivée de det vaut

$$D\det(M) \cdot H = \mathrm{tr}({}^tCo(M)H) = \mathrm{tr}(H\,{}^tCo(M))$$

et si M est inversible ${}^tCo(M) = (\det M)M$.
Donc, comme $R(t, 0)$ est inversible, et que

$$\frac{d}{dt}R(t, 0) = A(t)R(t, 0)$$

on a d'après la formule de la dérivée d'une composition

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\det R(t, 0)) &= \mathrm{tr}(\det R(t, 0)R'(t, 0)R(t, 0)^{-1}) \\ &= \mathrm{tr}(\det R(t, 0)A(t)) \\ &= \mathrm{tr}(A) \det R(t, 0)\end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation scalaire qui s'intègre facilement et donne (5). □

Propriétés de la résolvante

On ne sait pas en général calculer R_A
Néanmoins :

(7) Si pour tous $t, s \in I$ $A(t)$ et $A(s)$ commutent $R_A(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t (A(s))ds}$

(8) On dispose de la formule suivante (peu utile en pratique)

$$\begin{aligned}R_A(t, t_0) &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0 \leqslant s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant t} A(s_n) \cdots A(s_1) ds_1 \cdots ds_n \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{s_1, \ldots, s_n \in [t_0, t]} T(A(s_1) \cdots A(s_n)) ds_1 \cdots ds_n\end{aligned}$$

où $T(A(s_1) \cdots A(s_n)) = A(s_{\sigma(1)}) \cdots A(s_{\sigma(n)})$, (produit chronologique) σ étant l'unique permutation des indices $1, \ldots, n$ pour laquelle $s_{\sigma(1)} > \cdots > s_{\sigma(n)}$ (on peut supposer les indices tous distincts).

Variation de la constante (II)

La connaissance de la résolvante permet de résoudre toutes les équations affines c.-à-d. avec un second membre.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$ (I intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Variation de la constante (II)

Théorème (Variation de la constante)

On a pour tout t

$$X(t) = R_A(t,t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} R_A(t,s)b(s)ds.$$

Démonstration. En effet si on pose $Y(t) := R_A(t,t_0)^{-1}X(t)$ on a

$$\begin{aligned} Y'(t) &= -R_A(t,t_0)^{-1}R_A'(t,t_0)R_A(t,t_0)^{-1}X(t) + R_A(t,t_0)^{-1}(A(t)X(t)+b(t)) \\ &= -R_A(t,t_0)^{-1}A(t)X(t) + R_A(t,t_0)^{-1}(A(t)X(t)+b(t)) \\ &= R_A(t_0,t)b(t). \end{aligned}$$

d'où

$$X(t) = R_A(t,t_0)\left(X_0 + \int_{t_0}^{t} R_A(t_0,s)ds\right)$$

□

Sommaire Plan du chapitre 5

Théorie des perturbations (cas linéaire)

Le problème : Etant donnée $A_\epsilon(\cdot) \in C^0(I, M(n,\mathbb{K}))$ proche de $A_0(\cdot) \in C^0(I, M(n,\mathbb{K}))$ (I intervalle borné) dont on connaît la résolvante R_{A_0}, estimer la résolvante R_{A_ϵ} ; ou encore étudier la solution $X(\epsilon,\cdot)$ de

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_\epsilon(t)X(t) + b_\epsilon(t) \\ X(0) = v_0 \end{cases}$$

(on suppose $t_0 = 0$).
D'après la formule de la résolvante, il suffit dans un premier temps d'étudier le problème linéaire où $b_\epsilon = 0$.
Pour simplifier l'analyse, nous supposons que $A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$ où $F(\cdot) \in C^0(I, M(n,\mathbb{K}))$ et A_0 est constante ; ϵ étant un petit paramètre réel.

Application à la méthode des perturbations

D'après le théorème de dépendance différentiable (cas linéaire), ou la formule donnant la résolvante sous forme de sommes d'intégrales itérées, nous savons que $\epsilon \mapsto R_A(\cdot,0)$, $\mathbb{R} \to C^1(I, M(n,\mathbb{K}))$ est C^∞ et même analytique.
Par conséquent, on peut écrire un développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + Q(\epsilon,t)$$

où

$$\|Q(\epsilon,\cdot)\|_{C^1(I)} \leqslant \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}.$$

Théorie des perturbations (cas linéaire)

Le but de la théorie des perturbations est de déterminer les fonctions $Y_1(\cdot), \dots, Y_k(\cdot)$.
Pour cela :

- On injecte

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + Q(\epsilon, t)$$

dans

$$\begin{cases} \dot{R}_{A_\epsilon}(t,0) = (A_0 + \epsilon F(t)) R_{A_\epsilon}(t,0) \\ R_{A_\epsilon}(0,0) = I \end{cases}$$

- et on utilise le fait qu'un développement limité est unique.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

Exemple

$$\begin{aligned} &A_0 e^{tA_0} + \epsilon \dot{Y}_1(t) + \cdots + \epsilon^k \dot{Y}_k(t) + \dot{Q}(\epsilon, t) \\ &\qquad = (A_0 + \epsilon F(t))(e^{tA_0} + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + Q(\epsilon, t) \end{aligned}$$

d'où en regroupant en puissance de ϵ

$$\begin{aligned} &\epsilon \Big(\dot{Y}_1(t) - A_0 Y_1(t) - F(t) e^{tA_0} \Big) + \epsilon^2 \Big(\dot{Y}_2(t) - A_0 Y_1(t) - F(t) Y_1(t) \Big) + \\ &\qquad \cdots + \epsilon^k \Big(\dot{Y}_k(t) - A_0 Y_k(t) - F(t) Y_{k-1} \Big) = Q(\epsilon, t) \end{aligned}$$

avec $\|Q(\epsilon, \cdot)\|_{C^0(I)} \leqslant \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

Par conséquent (unicité du D.L.)

$$\begin{aligned} &\dot{Y}_1(t) - A_0 Y_1(t) - F(t) e^{tA_0} = 0 \\ &\dot{Y}_2(t) - A_0 Y_2(t) - F(t) Y_1(t)) = 0 \\ &\vdots \\ &\dot{Y}_k(t) - A_0 Y_k(t) - F(t) Y_{k-1}(t) = 0 \end{aligned}$$

De même on doit avoir

$$I = R_{A_\epsilon}(0,0) = I + \epsilon Y_1(0) + \cdots + \epsilon^k Y_k(0) + Q(\epsilon, 0)$$

si bien que $Y_1(0) = \cdots = Y_k(0) = 0$.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

On trouve donc Y_1 en résolvant l'équation différentielle matricielle (attention l'espace des phases est $M(n, \mathbb{K})$)

$$\begin{cases} \dot{Y}_1(t) = A_0 Y_1(t) + F(t) e^{tA_0} \\ Y_1(0) = 0 \end{cases}$$

qui se résout par la méthode de variation de la constante ;
Puis, connaissant Y_1 on résout

$$\begin{cases} \dot{Y}_2(t) = A_0 Y_2(t) + F(t) Y_1(t) \\ Y_2(0) = 0 \end{cases}$$

et ainsi de suite.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

Remarque :
Il est parfois plus commode pour les calculs de faire la théorie des perturbations directement sur l'équation

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_\epsilon(t)X(t) + b_\epsilon(t) \\ X(0) = v_0 \end{cases}$$