M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

Chapitre 4
EDO linéaires à coefficients constants

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire Plan du chapitre 4

Equations linéaires à coefficients constants

On suppose à présent $E = \mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$) et que $A(\cdot) = \text{constante} = A \in M(n, \mathbb{R})$ et $b(\cdot) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

La solution est facile à écrire :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$$

où on définit pour $B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$e^B = \exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \in GL(n, \mathbb{K})$$

Equations linéaires à coefficients constants

En effet, en utilisant le point (6) du transparent suivant :

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}X_0) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{t^{k-1}}{k!}A^k\right)X_0 = A\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!}A^l\right)X_0 = A(e^{tA}X_0).$$

EDO à coeff. constants : l'exponentielle

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

1. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
2. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$
3. L'application exponentielle est $\mathbb{K}$-analytique (et donc de classe C^∞)
4. L'application linéaire tangente de l'exponentielle en 0 est l'identité : $D\exp(0) \cdot H = H, \quad \forall H \in M_n(\mathbb{K})$.
5. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent, i.e. $AB = BA$, on a, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. (faux en général)
6. $f(t) = \exp(tA)$ est C^∞ et $f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
7. Si $P \in GL(n, \mathbb{K})$, $Pe^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}$.
8. Si Δ est une matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alors e^Δ est diagonale d'éléments diagonaux $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$

Sommaire Plan du chapitre 4

Equations linéaires à coefficients constants

Etude de la dynamique

Mise sous forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours de façon unique $A = S + N$ avec : S diagonalisable : $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$, N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $N^k = 0$ et S et N commutent $(SN = NS)$; en fait S et N sont polynomiales en A .
Donc

$$e^{tA} = e^{tS}e^{tN} \text{ (} S \text{ et } N \text{ commutent)} = Pe^{\mathrm{diag}(t\lambda_1,\dots,t\lambda_n)}P^{-1}e^{tN}$$

avec $e^{tN} = I + tN + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}$: donc polynôme en t et $e^{\mathrm{diag}(t\lambda_1,\dots,t\lambda_n)} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$.

Conclusion :

Théorème

Les coefficients de $e^{tA}X_0$ sont des combinaisons linéaires de termes de la forme $t^p e^{t\lambda_q}$, $(0 \leqslant p \leqslant k-1,\ 1 \leqslant q \leqslant n)$

Espaces caractéristiques

On peut en fait être plus précis.
Origine géométrique/algébrique de la décomposition $A = S + N$. Soit $\mu_A(X)$ le polynôme minimal de A : le polynôme de plus petit degré (normalisé) qui annule A ($\mu_A(A) = 0$).
$\mu_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ sont les valeurs propres de A (on a toujours $1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le polynôme caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors (Théorème de décomposition des noyaux)

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$;
- $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$ est invariant par A (espaces caractéristiques) ;
- A restreinte à $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$ est de la forme $\lambda_i \mathrm{id}_{\Gamma_i} + n_i$ où $n_i \in \mathrm{End}(\Gamma_{\lambda_i})$ est nilpotent d'ordre α_i ($n_i^{m_i - 1} \neq 0$, $n_i^{m_i} = 0$).

Espaces caractéristiques

Théorème

Si le polynôme minimal de A est de la forme $\mu_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$, les coefficients de $e^{tA}X_0$ sont des combinaisons linéaires de termes de la forme $t^p e^{t\lambda_i}$, $(0 \leqslant p \leqslant m_i - 1,\ 1 \leqslant i \leqslant r)$

Démonsration Utiliser le fait que

$$\begin{aligned}\exp(\lambda_i \mathrm{id}_{\Gamma_i} + n_i) &= e^{t\lambda_i}\exp(tn_i) \\ &= e^{t\lambda_i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tn_i)^k}{k!} \\ &= e^{t\lambda_i}\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{(tn_i)^k}{k!}\end{aligned}$$

car n_i est m_i-nilpotent. □

Sommaire Plan du chapitre 4

EDO à coeff. constants : Décomposition dynamique

La décompositon géométrique précédente a un sens dynamique :

Théorème

On a $\mathbb{K}^n = \Gamma_s \oplus \Gamma_u \oplus \Gamma_c$ (espaces stable, instable, central) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) où

- $\Gamma_s(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i<0} \ker(A-\lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \lim_{t\to\infty} \|e^{tA}.v\| = 0\}$
- $\Gamma_u(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i>0} \ker(A-\lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \lim_{t\to-\infty} \|e^{tA}.v\| = 0\}$
- $\Gamma_c(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i=0} \ker(A-\lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \exists C, M,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{tA}.v\| \leqslant C(1+|t|)^M \|v\|.\}$

EDO à coeff. constants : Décomposition dynamique

On a alors le résultat plus précis suivant :

Théorème

Pour tous $0 < \lambda_s < \min_{\Re\lambda_i<0} |\Re\lambda_i|$, $0 < \lambda_u < \min_{\Re\lambda_i>0} \Re\lambda_i$, il existe $C > 0$ tel que

- $\forall v \in \Gamma_s(A),\ \forall t > 0,\ \|e^{tA}.v\| \leqslant Ce^{-\lambda_s t}\|v\|,\ \|e^{-tA}.v\| \geqslant Ce^{\lambda_s t}\|v\|$
- $\forall v \in \Gamma_u(A),\ \forall t > 0,\ \|e^{-tA}.v\| \leqslant Ce^{-\lambda_u t}\|v\|,\ \|e^{tA}.v\| \geqslant Ce^{\lambda_u t}\|v\|$
- $\forall v \in \Gamma_c(A),\ \forall t \in \mathbb{R},\ C^{-1}\|v\| \leqslant \|e^{tA}.v\| \leqslant C(1+|t|)^n\|v\|.$

Sommaire Plan du chapitre 4

EDO à coeff. constants : Stabilité et stabilité asymptotique

On dit que 0 est stable (au sens de Lyapunov) (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.
On dit que 0 est asymptotiquement stable (quand $t \to +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Théorème (Critère de Routh)

- *l'origine est asymptotiquement stable (quand $t \to \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives.*
- *l'origine est stable (quand $t \to \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles négatives et celles λ_i qui sont de parties réelles nulles sont telles que pour tout $q \geqslant 1$ $\ker(A-\lambda_i I)^q = \ker(A-\lambda_i I)$ (on dit que A est diagonalisable en λ_i)*

Demonstration. La démonstration est une conséquence du théorème de décomposition des noyaux. □

Sommaire Plan du chapitre 4

EDO à coeff. constants : Exemples en dimension 2

Cas particulier important : $A \in sl(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
On a alors pour tout t, $e^{tA} \in SL(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \det M = 1\}$.
Le cas général se ramène facilement à ce cas : si $A \in M(2,\mathbb{R})$,
$\tilde{A} := A - (\mathrm{tr}(A)/2)I \in sl(2,\mathbb{R})$ et $e^{tA} = e^{t(\mathrm{tr}(A)/2)}e^{t\tilde{A}}$.
Dans la suite on se concentre sur le cas où $A \in sl(2,\mathbb{R})$.
On posera dans la suite $\omega = \sqrt{|\det A|}$.

EDO à coeff. constants : Exemples en dimension 2

Si $\det A > 0$:

- deux v.p. imaginaires pures $\pm i\omega$
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$;
- toutes les orbites sont des ellipses parcourues avec la même période : A est elliptique.
- L'origine est stable.
- Il existe $P \in GL(2,\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1}$

EDO à coeff. constants : Exemples en dimension 2

Si $\det A < 0$:

- deux v.p. réelles opposées $\pm\omega$;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_s(A) \oplus \Gamma_u(A)$ où $\Gamma_s = \mathbb{R}v_s$, $\Gamma_u = \mathbb{R}v_u$.
- Les orbites sont des hyperboles : A est hyperbolique
- L'origine est instable.
- Il existe $P \in GL(2,\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\omega t} \end{pmatrix} P^{-1}$

EDO à coeff. constants : Exemples en dimension 2

Si $\det A = 0$:

- deux v.p. nulles ;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$ mais A est nilpotente d'ordre 2 ou égale à $\pm Id$
- A est dite parabolique
- L'origine est instable si $a \neq 0$ (stable sinon).
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $A = P \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} 1 & ta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exemples

1) Résoudre avec $a, b \in]0, \infty[$,

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0.$$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, il est équivalent de résoudre

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

dont les solutions sont

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \qquad X_0 \in \mathbb{R}^2.$$

Pour calculer l'exponentielle de matrice on tente de diagonaliser A. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(T) = \det(T - A)$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ b & T + a \end{pmatrix} = T^2 + aT + b.$$

Exemples

Ses racines sont

1. Si $\Delta = a^2 - 4b > 0$ distinctes et réelles < 0
$$\lambda_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < 0$$
2. Si $\Delta < 0$, distinctes de parties réelles < 0
$$\lambda_\pm = \frac{-a \pm i\sqrt{|a^2 - 4b|}}{2} < 0$$
3. Si $\Delta = 0$, égales à $\lambda = -a/2 < 0$.

Dans tous les cas, elles sont de parties réelles < 0 donc, d'après le **critère de Routh**, 0 est un équilibre asymptotiquement stable.

Exemples

Dans le cas $\Delta \neq 0$, les vp $\lambda_\pm$ de A sont distinctes et les solutions de

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

sont de la forme

$$x(t) = \mu_+ e^{t\lambda_+} + \mu_- e^{t\lambda_-}$$

Dans le cas $\Delta = 0$ elles sont de la forme

$$x(t) = (\mu + \nu t)e^{t\lambda}.$$

Exemples

2) Oscillateur harmonique

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

L'EDO s'écrit avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, sous la forme

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les solutions sont

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \qquad X_0 \in \mathbb{R}^2.$$

La matrice A est de trace nulle, donc dans $sl(2, \mathbb{R})$.

Exemples

Comme $\det A = \omega^2 \geqslant 0$ on a

- Si $\omega \neq 0$, la matrice A est elliptique et donc 0 est stable (on peut aussi remarquer que les vp de A sont distinctes et imaginaires pures et utiliser le critère de Routh). Les solutions de

$$X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

sont de la forme

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

et celles de $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ s'écrivent

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t).$$

Elles sont toutes périodiques de période $2\pi/\omega$.

Exemples

En fait le calcul de l'exponentielle e^{tA} montre que

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)X_0 = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} X_0$$

- Si $\omega = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est parabolique (elle est nilpotente), donc

$$X(t) = e^{tA}X(0) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(0)$$

et les solutions de $x''(t) = 0$ sont de la forme

$$x(t) = \mu t + \nu.$$

Exemples

3) Trouver la forme générale des solutions de l'EDO scalaire d'ordre n

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = 0. \tag{1}$$

On écrit l'EDO sous la forme $X' = AX$ et on constate que A est une matrice compagnon et que son polynôme minimal égal

$$\mu_A(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Si on factorise μ_A

$$\mu_A(T) = \prod_{i=1}^{r} (T - \lambda_i)^{m_i}$$

on voit que les solutions de (1) sont des combinaisons linéaires de $t^p e^{t\lambda_i}$, $(0 \leqslant p \leqslant m_i - 1,\ 1 \leqslant i \leqslant r)$.

Sommaire Plan du chapitre 4

Méthode de variation de la constante (I)

On veut résoudre à présent

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + b(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème (Variation de la constante)

On a pour tout t

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Démonstration. En effet si on pose $Y(t) := e^{-tA}X(t)$ on a

$$Y'(t) = -Ae^{-tA}X(t) + e^{-tA}(AX(t) + b(t)) = e^{-tA}b(t).$$

□