M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

Chapitre 3
Théorèmes d'existence et d'unicité
Cauchy-Lipschitz

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire Plan du chapitre 3

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Cadre

- E un espace de Banach (i.e. un espace vectoriel normé complet) muni d'une norme $\|\cdot\|$: l'espace des phases (p. ex. $\mathbb{R}^n$ ou esp. dim. infinie).
- I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ tel que $(t_0, y_0) \in \Omega$.
- Ω ouvert de $\mathbb{R} \times E$ contenant (t_0, y_0).
- $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times E \to E$ une application continue

Problème de Cauchy (*i.e. satisfaisant une condition initiale*) : Trouver $y : I \to E$ (C^1) vérifiant l'équation différentielle ordinaire (E.D.O.) :

$$\forall t \in I, \; y'(t) = f(t, y(t)), \tag{1}$$

et satisfaisant la condition initiale : $y(t_0) = y_0 \qquad (1')$

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Cadre

Les E.D.O. de degré $k \geqslant 2$ se ramènent à des $E.D.O.$ d'ordre 1 quitte à agrandir l'espace des phases : si $x : I \to E$,

$$\frac{d^k x}{dt^k}(t) = g(t, x(t), \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(t)) \tag{2}$$

se ramène à

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{3}$$

où $y = (y_1, \dots, y_k) \in E^k$:

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Cadre

$$\begin{cases} \dot{y}_1 & = y_2 \\ \dot{y}_2 & = y_3 \\ \vdots & = \vdots \\ \dot{y}_{k-1} & = y_{k-2} \\ \dot{y}_k & = g(t, y_1(t), \dots, y_{k-1}(t)) \end{cases} \tag{4}$$

$x(\cdot)$ est solution de (2) si et seulement si $(x(\cdot), \frac{dx}{dt}(\cdot), \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(\cdot))$ est solution de (4)

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Fonctions lipschitzienne

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times E \to E$ continue, nous dirons que f est localement (uniformément) lipschitzienne sur Ω (par abus de langage nous sous-entendons "en y") si pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times E$ il existe un voisinage $W \subset \Omega$ de (t_0, y_0) et une constante K_W tels que pour tous (t, y_1), (t, y_2) dans W

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant K_W \|y_1 - y_2\|.$$

Nous notons $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega, E)$.

Si f est C^1 en y cette condition est automatiquement satisfaite.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Existence et unicité locales

Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Supposons f localement lipschitzienne sur Ω et soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

admet une solution unique définie sur $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Preuve

Démonstration : Théorème du point fixe de Picard.
On choisit δ et a de façon que $W_{\delta,a} := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(y_0, a)} \subset \Omega$, on note $M = \sup_{W_{\delta,a}} |f| < \infty$ (cette quantité est bien finie si δ, a sont suffisamment petits car f est continue en (t_0, y_0)) et $K_{W_{\delta,a}}$ une constante de Lipschitz de f (au sens de la définition précédente) valide sur $W_{\delta,a}$.
On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(y_0, a)}) &\to C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(y_0, a)}) \\ y(\cdot) &\mapsto y_0 + \int_{t_0}^{\cdot} f(s, y(s)) ds \end{aligned}$$

$$\mathcal{T}(y(\cdot)) = y(\cdot) \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} \dot{y} & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Preuve

$\mathcal{T}$ envoie bien $C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(y_0, a)})$ dans lui-même si δ est suffisamment petit (p.ex. $\delta M < a$) : en effet

$$\|\mathcal{T}(y(\cdot))(t) - y_0\| \leqslant \delta M.$$

$\mathcal{T}$ est contractante si δ est suffisamment petit (p.ex. $\delta K_{W_{\delta,a}} < 1/2$) :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(u(\cdot)) - \mathcal{T}(v(\cdot))\| &\leqslant \delta \sup_{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| \\ &\leqslant \delta K_{W_{\delta,a}} \sup_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|u(\cdot) - v(\cdot)\| \end{aligned}$$

$\square$

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Remarques

- Si $L \subset \Omega$ est un compact, la taille de l'intervalle de définition de la solution de condition initiale $(t_0, y_0) \in L$ est minorée par une constante qui ne dépend que de L (et continûment de $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega, E)$ muni de la topologie "compact-ouvert" : f_n converge vers f pour cette topologie si et seulement si sur tout compact f_n converge vers f uniformément et $Lip(f_n - f) \to 0$).
- Le théorème de Picard à paramètre montre que si f dépend de façon C^k d'un paramètre, les solutions locales (ou pas : *cf.* plus bas) obtenues dépendent C^k de ce paramètre ;

- Si f est seulement continue, le théorème de Peano affirme que la partie existence du théorème de Cauchy-Lipschitz est vraie. En revanche, il n'y a plus nécessairement unicité.
  Exemple : l'équation différentielle, $y' = \sqrt{(|y|)}$, admet sur $(0, \infty)$ les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ comme solutions vérifiant $y(0) = 0$.

Unicité globale

Théorème

Si f est localement lipschitzienne sur Ω, et si $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ sont deux solutions de $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, définies sur le même intervalle I alors elles sont égales.

Démonstration. Notons J l'ensemble des points $t \in I$ pour lesquels $y_1(t) = y_2(t)$. Cet ensemble J est non vide (il contient t_0). L'unicité locale donnée par Cauchy-Lipschitz démontre que cet ensemble est ouvert. Il est également fermé (dans I) : si $t_n \in J$ converge vers $t_* \in I$ alors $y_1(t_*) = y_2(t_*)$. Comme $I = J \cup (I \setminus J)$, $J \neq \emptyset$ et que I est connexe on doit avoir $I \setminus J = \emptyset$. □

Existence globale

- Les solutions d'un problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ ne sont pas toujours définies sur I tout entier.
  Exemples : $y'(t) = 1 + y^2(t)$ admet pour solution $y(t) = \tan(t)$ qui "explose" en $t \in (\pi/2) + \pi\mathbb{Z}$.
- Notion de temps de vie des solutions, intervalle maximal (voir cours 4)

Existence globale

En anticipant sur le cours 4 :

Théorème (Critère d'existence globale)

Si f est définie sur $I \times E$ et est à "croissance affine à l'infini" (en particulier si f est affine) dans le sens suivant : il existe $a : I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\|f(t, y)\| \leqslant a(t)\|y\| + b(t)$$

alors $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$) admet une unique solution définie sur I tout entier.

Sommaire Plan du chapitre 3

Equations affines

Résultats généraux

Supposons à présent $\Omega = I \times E$ et $f(t, y) = A(t)y + b(t)$ où $A(\cdot) : I \to \mathcal{L}_c(E, E)$ et $b : I \to E$ continues, I : intervalle.

Théorème (Existence et Unicité globales dans le cas affine)

Avec les notations précédentes, pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in E$, il existe une unique solution $X(\cdot) \in C^1(I, E)$ (définie sur I tout entier) de

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

En outre, si I est borné, l'application $C^0(I, \mathcal{L}_c(E, E)) \times C^0(I, E) \times E \to C^0(I, E)$ qui à $(A(\cdot), b(\cdot), X_0)$ associe $X(\cdot)$ est continue (en fait C^∞).

Equations affines

Résultats généraux

Démonstration On applique la version modifiée du théorème de Picard à

$$\mathcal{T} : C^0(I, E) \to C^0(I, E)$$
$$X(\cdot) \mapsto X_0 + \int_{t_0}^{\cdot} A(s) \cdot X(s) + b(s) ds$$

$\mathcal{T}$ n'est pas nécessairement contractante mais un de ses itérés l'est :

$$\|(\mathcal{T}(X_1)(t) - \mathcal{T}(X_2)(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \|(X_1 - X_2)(s)\| ds \qquad (*)$$

et donc

$$\|(\mathcal{T}(X_1)(t) - \mathcal{T}(X_2)(t)\| \leqslant |t - t_0| \|A(\cdot)\|_{C^0(I)} \|(X_1 - X_2)(\cdot)\|_{C^0(I)}$$

En itérant k-fois (récurrence sur k en utilisant $(*)$) :

$$\|(\mathcal{T}^k(X_1)(t) - \mathcal{T}^k(X_2)(t)\| \leqslant |t - t_0|^k \frac{\|A(\cdot)\|^k_{C^0(I)}}{k!} \|(X_1 - X_2)(\cdot)\|_{C^0(I)}$$

Equations affines

Résultats généraux

Donc si I est borné de longueur L et pour $k >> 1$

$$\rho := \frac{(L\|A\|_{C^0(I)})^k}{k!} < 1$$

$\mathcal{T}^k$ est contractant, donc admet un unique point fixe $X(\cdot)$.
$X(\cdot)$ est aussi l'unique point fixe de $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}^k(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T}^{k+1}(X) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^k(X)) = \mathcal{T}(X).$$

Par l'unicité : $\mathcal{T}(X) = X$ (réciproque triviale).
Le théorème de Picard à paramètre (version C^0) appliqué à $\mathcal{T}^k$ donne la deuxième partie du théorème : la dépendance est continue en les paramètres..

Equations affines

Résultats généraux

Pour obtenir la dépendance C^p (pour tout $p \geqslant 1$) on applique la version C^p du théorème de Picard à paramètres.
On a vu que $\mathcal{T}^k(\cdot, A, b, X_0)$ était ρ-contractante sur *l'espace de Banach* $C^0(I, E)$; comme elle est clairement affine et continue en $X(\cdot)$ elle est C^p pour tout p et comme $\mathcal{T}^k$ est ρ-contractante (et affine) on a $\|D_X \mathcal{T}^k\| \leqslant \rho$. Par ailleurs la dépendance en $A(\cdot) \in C^0(I, \mathcal{L}_c(E, E))$ (resp. $b(\cdot) \in C^0(I, E)$, resp. $X_0 \in E$) est linéaire (resp. affine) continue, si bien que $\mathcal{T}$ est C^p par rapport à chacune des variables $A(\cdot)$, $b(\cdot), X_0$ et $X(\cdot)$: elle est donc C^p pour tout p en $(X(\cdot), A(\cdot), b(\cdot))$
Les hypothèses du théorème de Picard à paramètre sont vérifiées.

$\square$