M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

Chapitre 2
Théorème du point fixe (Picard)
Inversion locale, Fonctions implicites

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire

Théorème du point fixe de Picard

(A, d_A), (B, d_B) deux espaces métriques.

- $T : A \to B$ est ρ-lipschitzienne ssi $\forall\, x, y \in A$,
$$d_B(T(x), T(y)) \leqslant \rho . d_A(x, y).$$
- Si $A = B$, $T : A \to A$ est ρ-contractante si ρ-lipschitzienne avec $0 \leqslant \rho < 1$.
- Lipschitzienne $\implies$ continue.
$C^{lip}(A, B)$= l'ensemble des $T : A \to B$ lipschitziennes ;
$Lip(T)$ la plus petite constante ρ admissible dans la définition précédente.

Rappels : Espaces métriques complets

Si (X, d) est métrique :

- Une suite de Cauchy suite (u_n) t.q. : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geqslant N$, $d(u_n, u_m) \leqslant \epsilon$.
- Espace métrique (X, d) complet : toute suite de Cauchy converge.
- Espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ Banach : complet.
- $$\begin{cases} F \subset X \text{ fermé} \\ (X, d) \text{ complet} \end{cases} \implies (F, d) \text{ complet.}$$

Théorème du point fixe de Picard

Théorème (du point fixe de Picard)

*(A, d) soit **complet**, $T : A \to A$, ρ-contractante $(0 \leqslant \rho < 1)$. Alors*

- ***T admet un unique point fixe** $x \in A$ (i.e. $T(x) = x$).*
- *Pour tout $x_0 \in A$ la suite $T^i(x_0)$ converge vers x.*

Remarque : mêmes conclusions s'il existe n t.q. T^n contractante :

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- **Existence** : Si $y \in A$,
$d(T^{n+1}(y), T^n(y)) \leqslant \rho d(T^n(y), T^{n-1}(y)) \leqslant \rho^n d(T(y), y)$.
- Donc par l'inégalité triangulaire et en sommant de n à $n + p - 1$,
$$d(T^{n+p}(y), T^n(y)) \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} d(T^{n+k-1}(y), T^{n+k}(y)) \leqslant (\sum_{k=0}^{p-1} \rho^{n+k}) d(T(y), y)$$
$$\leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho} d(T(y), y).$$
- La suite $T^n(y)$ est par conséquent de Cauchy et ainsi converge vers un x : $T^n(y) \to x$
- Comme $T^n(y) \to x$ on a aussi $T^{n+1}(y) \to x$ et donc
$$T(T^n(x)) = T^{n+1}(x) \implies T(x) = x.$$

Théorème du point fixe de Picard

- **Unicité** : si $T(y) = y$ et $T(y') = y'$ alors

$$d(y, y') = d(T(y), T(y')) \leqslant \rho d(y, y')$$

et comme $0 \leqslant \rho < 1$ on a $d(y, y') = 0$. $\Longrightarrow$ $y = y'$.

$\square$

Théorème du point fixe de Picard

Versions à paramètres (C^0 et Lipschitz)

Remarque importante pour la suite : Il existe des versions à paramètres du théorème de Picard (qu'il faut connaître).

- Version C^0 et Lipschitz. : (A, d) complet, Λ espace métrique

$$\begin{cases} T = T_\lambda \text{ dépend } C^0 \text{ ou Lipschitz d'un paramètre } \lambda \in \Lambda \\ \forall \lambda \in \Lambda,\ T_\lambda(\cdot) \text{ est } \rho\text{-contractante } (\rho < 1) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ le point fixe $x(\lambda)$ dépend C^0 ou Lipschitz de λ.

Théorème du point fixe de Picard

Versions à paramètres (C^k)

- Version C^k. : A fermé d'un Banach E, U ouvert de E t.q. $A \subset U$, Λ est un ouvert d'un EVN,

$$\begin{cases} \forall\ \lambda \in \Lambda, \quad T_\lambda : A \to A \\ \forall \lambda \in \Lambda,\ T_\lambda(\cdot) \text{ est } \rho\text{-contractante } (\rho < 1) \\ f\ C^k \text{ par rapport à } (x, \lambda) \in U \times \Lambda \\ \forall (x, \lambda) \in U \times \Lambda,\ \ \|D_x T(x, \lambda)\| \leqslant \rho < 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(\lambda) \text{ dépend } C^k \text{ de } \lambda \text{ et} \\ Dx(\lambda) = -(D_x T(x(\lambda), \lambda) - Id)^{-1} D_\lambda T(x(\lambda), \lambda). \end{cases}$$

Théorème du point fixe de Picard

Théorème de Picard à paramètre, version C^0 et lipschitz

Théorème (Picard à paramètre (version C^0 et lipschitz))

Soient (A, d) un espace métrique complet, Λ un espace métrique (topologique suffit) et $0 \leqslant \rho < 1$. Soit $T : A \times \Lambda \to A$ telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $T(\cdot, \lambda) : A \to A$ soit ρ-contractante. Alors, si T est continue, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot, \lambda)$ et l'application $x(\cdot) : \Lambda \to A$ est continue ; si en outre pour tout $x \in A$ fixé l'application $T(x, \cdot) : \Lambda \to A$ est C-lipschitzienne, l'application $x : \Lambda \to A$ est $C/(1-\rho)$-lipschitzienne.

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.
Cas C^0.

On applique le Théorème de Picard à $\mathcal{T} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ où $\mathcal{A} = C^0(\Lambda, A)$ muni de la norme du sup ($\|x\| = \sup_{\lambda\in\Lambda} \|x(\lambda)\|$) et $\mathcal{T}(x(\cdot)) = T(x(\cdot), \cdot)$ qui est bien ρ-contractante. □

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.
Cas *Lipschitz*.

Notons $x(\lambda)$ le point fixe de $T(\cdot, \lambda)$ et écrivons $T(x(\mu), \mu) - T(x(\lambda), \lambda) = T(x(\mu), \mu) - T(x(\lambda), \mu) + T(x(\lambda), \mu) - T(x(\lambda), \lambda)$. En utilisant l'inégalité triangulaire et le caractère ρ et C-lipschitzien de $T(\cdot, \mu)$ et $T(x(\lambda), \cdot)$ on obtient

$$\|x(\mu) - x(\lambda)\| \leqslant C\|\mu - \lambda\| + \rho\|x(\mu) - x(\lambda)\|$$

ce qui donne le résultat. □

Théorème du point fixe de Picard
Théorème de Picard à paramètre (version C^k)

Théorème (Picard à paramètre, version C^k)

Soient $A \subset U \subset E$, U ouvert et A fermé du Banach E, $\Lambda \subset F$, Λ ouvert de l'EVN F ; soit en outre $0 \leqslant \rho < 1$. Supposons que $T : U \times \Lambda \to E$ soit de classe C^k ($k \geqslant 1$), envoie $A \times \Lambda$ dans A et que : (a) pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $T(\cdot, \lambda) : A \to A$ est ρ-contractante et : (b) pour tout $(x, \lambda) \in U \times \Lambda$ on a $\|D_x T(x, \lambda)\| \leqslant \rho$. Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot, \lambda)$ et l'application $x(\cdot) : \Lambda \to A$ est C^k et on a

$$Dx(\lambda) = -(D_x T(x(\lambda), \lambda) - Id)^{-1} D_\lambda T(x(\lambda), \lambda).$$

Théorème du point fixe de Picard
Théorème de Picard à paramètre (version C^k)

Remarque :

- La condition (b) n'implique (a) (condition globale) que si U est convexe.
- On peut remplacer la condition (a) par : pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot, \lambda)$ et l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.
- La condition $\|D_x T(\cdot, \lambda)\| \leqslant \rho < 1$ implique que $Id - D_x T(x, \lambda)$ est inversible pour $x \in A$.

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- Notons $x(\lambda)$ le point fixe associé à $T(\cdot,\lambda)$ (existence garantit par la condition (a)) ; par la version lipschitzienne de Picard, on sait que $x:\Lambda\to A$ est lipschitzienne (au moins au voisinage d'un point $\lambda_0\in\Lambda$ choisi à l'avance).
- Si on pose $\Delta x(\lambda,\Delta\lambda)=x(\lambda+\Delta\lambda)-x(\lambda)$, on a donc $\|\Delta x(\lambda,\Delta\lambda)\|\leqslant C\|\Delta\lambda\|$.
- Comme $x(\lambda)=T(x(\lambda),\lambda)$ et $x(\lambda+\Delta\lambda)=T(x(\lambda+\Delta\lambda),\lambda+\Delta\lambda)$

$$\Delta x(\lambda,\Delta\lambda)=D_1T(x(\lambda),\lambda)\Delta x(\lambda,\Delta\lambda)+D_2T(x(\lambda),\lambda)\Delta\lambda+o(\Delta\lambda).$$

Théorème du point fixe de Picard

- En itérant l'inégalité précédente on obtient

$$\Delta x(\lambda,\Delta\lambda)=(D_1T(x(\lambda),\lambda)^n\Delta x(\lambda,\Delta\lambda)+\sum_{k=0}^{n-1}(D_1T(x(\lambda),\lambda))^kD_2T(x(\lambda),\lambda)\Delta\lambda+o_n(\Delta\lambda). \quad (1)$$

(Remarquer que le petit o dépend aussi de n).

- Soit $\epsilon>0$ et choisissons n tel que pour λ dans un voisinage de λ_0, on ait $\rho^n\max(C,(1-\rho)^{-1}\|D_2T(x(\lambda),\lambda)\|)<\epsilon/3$
- Si on note $L(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(D_1T(x(\lambda),\lambda))^kD_2T(x(\lambda),\lambda)\in L_c(F,E)$ (existe car $\rho<1$) on a $\|\Delta x(\lambda,\Delta\lambda)-L(\lambda)\Delta\lambda\|\leqslant(2\epsilon/3)\|\Delta\lambda\|+o_n(\Delta\lambda)$. Donc pour $\Delta\lambda$ suffisamment petit $\|x(\lambda+\Delta\lambda)-x(\lambda)-L(\lambda)\Delta\lambda\|\leqslant\epsilon\|\lambda\|$.

Théorème du point fixe de Picard

- Cela démontre que $x(\cdot)$ est dérivable en λ et que $Dx(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(D_1T(x(\lambda),\lambda))^kD_2T(x(\lambda))$.
- Cette série est normalement convergente donc $Dx(\cdot)$ est continue (observer que $D_1T(x(\lambda),\lambda)$,$D_2T(x(\lambda),\lambda)$ sont continues en λ).
- La relation $Dx(\lambda)=-(D_1T(x(\lambda),\lambda)-Id)^{-1}D_2T(x(\lambda),\lambda)$ (obtenue en dérivant $x(\lambda)=T(x(\lambda),\lambda)$) montre par récurrence que $x(\cdot)$ est C^k si T est C^k. □

Sommaire

Inversion locale

La notation $f : (E, x_0) \to F$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 (en ensemble contenant un ouvert contenant x_0).

Théorème (d'inversion locale)

$$\begin{cases} E, F \text{ deux espaces de Banach}, x_0 \in E \\ f : (E, x_0) \to F \text{ de classe } C^k \ (k \geqslant 1) \text{ t.q. } f(x_0) = y_0 \in F \\ Df(x_0) \in L_c(E, F) \text{ inversible (et son inverse est donc continu)} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ *f est un difféomorphisme local de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0*

Preuve.– On suppose $x_0 = y_0 = 0$. On applique Picard à paramètre à $T_y(x) := Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1}.f(x))$ (y est le paramètre) :

$$T_y(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Inversion locale

Il faut donc vérifier que si y est suffisamment petit

$$T_y : x \mapsto Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1} \cdot f(x))$$

1. Envoie une boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$ dans elle-même pour un $\delta > 0$.
2. Est bien contractante sur cette boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$.

Or

$$DT_y(\cdot) = id - Df(0)^{-1}Df(\cdot) \implies \|DT_y\| \leqslant \varepsilon(\delta), \quad \lim_{\delta \to 0} \varepsilon = 0.$$

donc par les accroissements finis si δ et $\|y\| \ll 1$, $x \in \overline{B(0, \delta)}$

1. $\|T_y(x)\| \leqslant \|Df(0)^{-1}\| \cdot \|y\| + \varepsilon(\delta)\|x\| \leqslant 2\delta\varepsilon(\delta) \leqslant \delta$
2. $\|T_y(x) - T_y(x')\| \leqslant \varepsilon(\delta)\|x - x'\| \leqslant (1/2)\|x - x'\|$.

□

Inversion locale

Exemples

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (2x + y + y^3, x + y + x^5)$;
$\exists \epsilon > 0$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $|u|^2 + |v|^2 \leqslant \epsilon$, $\exists (x, y) \in Vois(0, 0)$, t.q. $f(x, y) = (u, v)$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée ; l'équation $f(x + 1) + \sin(f(x)^2) = g(x)$ admet une solution f continue bornée pourvu que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$ soit suffisamment petit.

Fonctions implicites

Théorème (des fonctions implicites)

$$\begin{cases} E, F \text{ Banach}, (x_0, \lambda_0) \in E \times F \text{ t.q. } f(x_0, \lambda_0) = 0 \\ f : (E \times F, (x_0, \lambda_0)) \to E \text{ classe } C^k \ (k \geqslant 1) \\ D_x f(x_0, \lambda_0) \in L_c(E, E) \text{ inversible} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ *$\exists$ voisinage $W = U \times V$ de (x_0, λ_0) t.q.*

$$\{(x, \lambda) \in W : f(x, \lambda) = 0\} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in V\}$$

où $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est C^k.
On a alors $\partial_\lambda x = -(D_x f(x, \lambda))^{-1} \circ D_\lambda f$.

Démonstration. Théo. d'inversion locale appliqué à $\phi(x, \lambda) = (f(x, \lambda), \lambda)$ définie sur un voisinage de $(E \times F, (x_0, \lambda_0)) \to E \times F$.

□

Fonctions implicites

Exemples

L'ensemble $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^5 + xy - 1 = 0\}$ contient un graphe $(x, y(x))$, $-\epsilon < x < \epsilon$ pour ϵ assez petit.