

M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

Chapitre 1 Rappels

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman.
- Régularité et chaos.

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Sommaire

- 1 Plan cours 1
- 2 Rappels de topologie
- 3 Rappels d'algèbre linéaire
- 4 Rappels de calcul différentiel

Plan du chapitre 1

- 1 **Rappels d'algèbre linéaire**
 - Changements de bases
 - Déterminants, traces
 - Réduction des endomorphismes
 - Exponentielle de matrice
- 2 **Rappels de calcul différentiel**
 - Application linéaire tangente (dérivée)
 - Applications de classe C^p
 - Exemples
 - Propriétés utiles

Rappels de topologie

Pour plus de détails sur cette section consulter Fondements de l'Analyse moderne, Tome 1, Jean Dieudonné.

Sommaire

- 1 Plan cours 1
- 2 **Rappels de topologie**
 - Espaces métriques
 - Ouverts, fermés
 - Espaces complets
 - Espaces compacts
 - Espaces connexes
- 3 Rappels d'algèbre linéaire
- 4 Rappels de calcul différentiel

Espaces métriques

Un **espace métrique** (X, d) est la donnée d'un ensemble X et d'une distance $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ telle que pour tous $x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un exemple important est celui des **espaces (vectoriels) normés** : E est un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty[$ vérifie pour tous $u, v \in E$, λ scalaire

- (i) $\|u\| = 0$ ssi $u = 0$
- (ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- (iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Dans ce cas $d(u, v) = \|u - v\|$ est une distance.

Ouverts, fermés

- Un **ouvert** U de X est un ensemble tel que pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$ ($B(x, r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$).
- Un ensemble est **fermé** ssi son complémentaire est ouvert.
- Une **union** (resp. **intersection**) **quelconque** d'**ouverts** (resp. **fermés**) est **ouverte** (resp. **fermée**) ; une **intersection** (resp. **union**) **finie** d'**ouverts** (resp. **fermés**) est **ouverte** (resp. **fermée**).
- Une application $f : X \rightarrow Y$ est **continue** ssi pour tout $V \subset Y$ ouvert (resp. fermé) l'ensemble $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ est ouvert (resp. fermé).
- De façon équivalente f est continue si pour toute suite (x_n) de X qui converge on a $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Remarque : topologie sur X

- La collection de tous les ouverts d'un espace métrique s'appelle sa **topologie**.
- De façon générale une topologie sur un ensemble X est une collection d'ensembles (les ouverts de la topologie) qui contient l'ensemble vide et X , qui est stable par unions quelconques et stable par intersections finies.
- Si (X, d) est un espace métrique et $Y \subset X$, la restriction de d à $Y \times Y$ est encore une distance dite distance induite. Les ouverts de (Y, d) sont les intersections des ouverts de X avec Y . On dit que la topologie de (Y, d) est *induite* par celle de X .

Intérieur, fermeture

- L'**intérieur** $\overset{\circ}{A}$ d'un ensemble $A \subset X$ est le **plus grand ouvert** de X (pour l'inclusion) inclus dans A . On a $\overset{\circ}{A} = \{x \in A : \exists r > 0, B(x, r) \subset A\}$. L'ensemble $A \subset X$ est ouvert dans X si $\overset{\circ}{A} = A$.
- L'**adhérence** $\overline{A}$ (ou la fermeture) de $A \subset X$ est le **plus petit fermé** de X contenant A . On a $\overline{A} = \{x \in X, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim a_n = x\}$. L'ensemble $A \subset X$ est fermé dans X si $\overline{A} = A$.

Espaces métriques complets

Si (X, d) est métrique :

- Une **suite de Cauchy** (u_n) est par définition une suite telle que : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N$, on ait $d(u_n, u_m) \leq \epsilon$.
- Un espace métrique (X, d) est dit **complet** si toute suite de Cauchy converge.
- Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit de **Banach** s'il est complet.

Espaces métriques complets

Exemples

Exemples

- Si E est un espace vectoriel de dimension finie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), il est complet pour n'importe laquelle de ses normes.
- Si U est un ouvert de l'EVN E et si F est un Banach alors l'ensemble $C^0(U, F)$ des applications continues $f : U \rightarrow F$ telles que $\sup_{x \in U} \|f(x)\| < \infty$, muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in U} \|f(x)\|$ est un espace de Banach.

Espaces métriques compacts

- Un espace métrique (X, d) est **compact** si de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
- Un compact est toujours fermé et borné et un fermé dans un compact (muni de la distance induite) est compact.
- Si X, Y sont deux espaces métriques, si X est compact et si $f : X \rightarrow Y$ est continue alors $f(X)$ est compact (très utile).
- **Critère séquentiel** (X, d) est compact $\iff$ de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente. La preuve de $\Leftarrow$ repose sur le **lemme de recouvrement de Lebesgue** utile en soit : si X est compact et $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X , il existe $\rho > 0$ tq pour tout $x \in X$, la boule $B(x, \rho)$ appartienne à au moins un des U_i .
- Une intersection décroissante de fermés non-vides dans un compact (X, d) est compacte et non-vide.
- Un produit quelconque de compacts est compact (topologie produit).
- En **dimension finie** $X \subset \mathbb{R}^n$ est compact ssi il est fermé et borné.

Espaces métriques complets

Exemples

- L'espace vectoriel des applications linéaires continues de $E \rightarrow F$, noté $L_c(E, F)$, muni de la **norme d'opérateur** est un espace de Banach si F est de Banach : la norme d'opérateur est définie par : si $T \in L_c(E, F)$, $\|T\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$.
- La norme d'opérateur vérifie : si $T, S \in L_c(E, E)$, $\|T \circ S\| \leq \|T\| \times \|S\|$
- L'ensemble des opérateurs linéaires continus **inversibles** (et d'inverse continu) d'un Banach E dans lui même est un ouvert de $L_c(E, E)$ (muni de la norme d'opérateurs) : par ex. la boule de centre id et de rayon $r < 1$ dans $L_c(E, E)$ est constitué d'opérateurs inversibles et d'inverse continu en effet : $(id - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} U^k$, si $\|U\| \leq r < 1$.

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X, d) est **connexe** ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- Il est équivalent de dire que toute application continue de X dans un ensemble fini (p. ex. $\{0, 1\}$) est constante.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe s'il est connexe pour la topologie induite ((A, d) est connexe) ou de façon équivalente si toute application continue de (A, d) dans $\{0, 1\}$ est constante.
- Si $A \subset X$ est connexe alors $\bar{A}$ est connexe : en effet si $f : \bar{A} \rightarrow \{0, 1\}$ est continue alors $f|_A$ est continue et $f(A)$ ne contient qu'un seul point (A connexe) et comme tout point de $\bar{A}$ est une limite de points de A , il en est de même de $f(\bar{A})$.

Espaces métriques connexes

- L'image d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).
- Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- On dit qu'un ensemble X est **connexe par arcs** si pour tous $x, y \in X$ il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un ensemble connexe par arcs est connexe.
- Un ouvert d'un EVN est connexe par arcs ssi il est connexe.

Composantes connexes

- Si $A \subset X$, les composantes connexes de A sont définies comme les composantes connexes de A pour la topologie induite.
- Une composante connexe est toujours fermée (l'adhérence d'une telle c.c. est connexe et par maximalité égale à la c.c.) .
- Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme (et de la distance associée) un ouvert U admet un nombre dénombrable de composantes connexes qui sont des ouverts de l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$: en effet si $x \in C$ où C est une c.c. de U alors $\exists r > 0$ t.q. la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, $B(x, r) \subset U$ est un connexe (par arcs) de U et contient x ; elle est donc nécessairement incluse dans C (par maximalité de C) ; ainsi C est ouverte. L'ensemble des composantes connexes de U forme donc une partition en ouverts de U . On peut donc choisir dans chaque C un point à coordonnées rationnelles. Ce codage démontre que la partition est au plus dénombrable.

Composantes connexes

- On dit que C est une **composante connexe** de X si c'est un sous-ensemble connexe de X , maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).
- Si $x \in X$, la composante connexe de x est le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant x : c'est l'union de tous les connexes de X contenant x . Cet ensemble est non vide ($\{x\}$ est un connexe contenant x) et est bien connexe : il suffit de vérifier qu'une union de connexes d'intersection non-vide est connexe (si f est une application continue de cette union dans $\{0, 1\}$ elle est constante sur chacun des connexes de l'union ; comme ces connexes ont une intersection non vide, ces valeurs constantes coïncident sur tous ces connexes : le critère de connexité est vérifié).
- L'ensemble des composantes connexes de X forme une partition de X et on peut donc définir une relation d'équivalence $x \sim y$ ssi x et y sont dans la même composante connexe de X .

Composantes connexes

On peut de la même façon définir la notion de composantes connexes par arcs (pour un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ces deux notions coïncident).

Sommaire

1 Plan cours 1

2 Rappels de topologie

3 Rappels d'algèbre linéaire

- Changements de bases
- Déterminants, traces
- Réduction des endomorphismes
- Exponentielle de matrice

4 Rappels de calcul différentiel

Rappels d'algèbre linéaire

- Quand $E = F$ on parle d'endomorphisme. Quand on représente un endomorphisme par une matrice on choisit $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Après changement de la base $\mathcal{B}_E$ de E la matrice A devient $P^{-1}AP$ où P est la matrice de changement de base.
- On dit que l'endomorphisme f est un automorphisme s'il est inversible : existence de f^{-1} (resp. A) tq $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ (resp. $A^{-1}A = A^{-1}A = I$).
- $A \in M_n(K)$ est inversible $\iff \det A \neq 0$. Si c'est le cas

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \times {}^t Co(A) \quad ({}^t B = B^T = \text{transposée de } B)$$

où $Co(A)$ est la **co-matrice** de A c'est-à-dire la matrice $n \times n$ dont le coefficient (i, j) égale $(-1)^{i+j}$ multiplié par le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en éliminant le coefficient A_{ij} .

Rappels d'algèbre linéaire

- Si $\mathcal{B}$ est une base d'un K -espace vectoriel E on représente un vecteur v de E dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice colonne X dont les coefficients sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , on appelle matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Si X représente v dans $\mathcal{B}$ et X' représente v dans $\mathcal{B}'$ on a $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$.
- On identifie une application linéaire $f : E \rightarrow F$ entre deux K -espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et m et dont on a fixé des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, à une matrice A de $M_{m,n}(K)$ (m lignes et n colonnes).
- Quand on change de bases dans E et F la matrice A représentant f dans ces nouvelles bases est de la forme $P^{-1}AQ$ où P et Q sont les matrices de changement de base dans E et F .

Rappels d'algèbre linéaire

Déterminant

- Rappels : le déterminant d'une matrice est une forme linéaire alternée des colonnes de la matrice.
- Pour le calcul d'un déterminant il est souvent utile de le développer suivant une ligne ou une colonne.
- Connaître le déterminant et l'inverse (quand il existe) d'une matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \det \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Si $A, B \in M_n(K)$, on a $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- Le déterminant d'une matrice A dont les colonnes sont les vecteurs colonnes $v_1, \dots, v_n$ représente le **volume** (avec un signe) du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$.
- On a $\det(P^{-1}AP) = \det A$ pour toute matrice P inversible. Le déterminant est donc invariant par changement de base (on peut ainsi définir le déterminant d'un endomorphisme).

Rappels d'algèbre linéaire

Trace

- La trace d'une matrice $A \in M_n(K)$ est la somme $\text{tr}(A)$ de ses éléments diagonaux.
- Pour tout $P \in GL(n, K)$, on a $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$. $\rightarrow$ permet de définir la trace d'un endomorphisme.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction des endomorphismes

- Une matrice n'est **pas toujours** diagonalisable. Exemple typique : les matrices **nilpotentes** càd matrices A tq pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
- Si les racines de $\chi_A(T)$ sont toutes distinctes alors A est diagonalisable (cf. plus bas).
- Cayley Hamilton** : Pour tout $A \in M_n(K)$, on a $\chi_A(A) = 0$.
- Polynôme minimal** : c'est le polynôme unitaire de plus bas degré $\mu_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mu_A(A) = 0$. Il divise tout polynôme qui annule A , en particulier le polynôme caractéristique.
- Si $\chi_A(T) = \prod_{\lambda \in \text{spec}(A)} (T - \lambda)^{c_\lambda}$, $c_\lambda \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mu_A(T) = \prod_{\lambda \in \text{spec}(A)} (T - \lambda)^{m_\lambda} \quad \text{avec} \quad 1 \leq m_\lambda \leq c_\lambda.$$

- Les espace $\Gamma_\lambda = \ker(A - \lambda)^{m_\lambda}$ s'appellent les **espaces caractéristiques** de A . Ils sont stables par A : $A(\Gamma_\lambda) \subset \Gamma_\lambda$.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction des endomorphismes

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qu'on appelle valeur propre) telle que $AX = \lambda X$.
- Le **spectre** de A (noté $\text{spec}(A)$), c'est-à-dire ensemble des v.p. de A , coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme de degré n

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot I - A). \quad \textbf{Polynôme caractéristique}$$

- Pour toute valeur propre λ de A on note E_λ l'**espace propre** associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda \times I)$.
- Si $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} E_\lambda$ on dit que A est **diagonalisable**. Il est équivalent de dire qu'il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} est diagonale.
- Les matrices d'une famille de matrices diagonalisables qui commutent sont diagonalisables dans une même base.

Rappels d'algèbre linéaire

Réduction des endomorphismes

- Théorème de décomposition des noyaux** : On a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} \Gamma_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} \ker(A - \lambda)^{m_\lambda}.$$

- Corollaire (Dunford-Schwartz)** : Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit de **façon unique** sous la forme

$$\begin{cases} A = S + N \\ SN = NS \end{cases} \quad \text{avec} \quad S \text{ diagonalisable, } N \text{ nilpotente.}$$

En outre S et N sont des polynômes en A .

- Décomposition de Jordan** : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont **chaque bloc** a un même $\lambda \in \text{spec}(A)$ sur la diagonale, des 1 sur la sur-diagonale et des 0 partout ailleurs (si ces blocs sont de taille 1 il n'y a pas de sur-diagonale). Pour tout $\lambda \in \text{spec}(A)$ un tel bloc apparaît.

Rappels d'algèbre linéaire

Diagonalisation, trigonalisation

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est annulée par un **polynôme scindé à racines simples** est diagonalisable.
- Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable (en base orthonormale).

Parfois la trigonalisation rend des services équivalents à la décomposition $S + N$ précédente.

- Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est **toujours** trigonalisable c-à-d conjuguée à une matrice triangulaire supérieure.
- L'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
- Une famille de matrices qui commutent est trigonalisable dans une même base.

Sommaire

1 Plan cours 1

2 Rappels de topologie

3 Rappels d'algèbre linéaire

4 Rappels de calcul différentiel

- Application linéaire tangente (dérivée)
- Applications de classe C^p
- Exemples
- Propriétés utiles

Rappels d'algèbre linéaire

Exponentielle de matrice

- Par définition c'est la série normalement convergente :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a $\exp(A) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- Si A et B commutent $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ mais si elles ne commutent pas, c'est en général faux.
- On a pour tout $P \in GL(n, \mathbb{R})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}.$$

- $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$.

Rappels de calcul différentiel

Soient E, F deux Banach, U un ouvert de E , $x_0 \in U$ et $f : U \rightarrow F$.

Definition

L'application f est différentiable (ou encore dérivable) en x_0 s'il existe une application linéaire continue $A_{x_0} : E \rightarrow F$ (la continuité est automatique en dimension finie) telle que la limite suivante est nulle :

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + v) - (f(x_0) + A_{x_0} \cdot v)\|_F}{\|v\|_E} = 0.$$

Si elle existe, une telle application linéaire est unique. On note $A_{x_0} = Df(x_0)$.

On a donc $f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$.

Rappels de calcul différentiel

- On notera $Df(x_0) := A_{x_0}$ et on l'appellera **l'application linéaire tangente** ou la **différentielle** de f en x_0 .
- En d'autres termes, $f(x_0) + Df(x_0) \cdot v$ est, *uniformément en v* (au voisinage de $v = 0$), une bonne approximation *affine* de $f(x_0 + v)$ à l'ordre $o(\|v\|)$.
- L'application linéaire $Df(x_0)$ étant continue (i.e vérifiant $\|Df(x_0) \cdot v\|_F \leq C \cdot \|v\|_E$) il est clair que f est alors *continue* en x_0 .
- Si f est dérivable en tout point de U et si l'application $x \mapsto Df(x)$ (de U dans $L_c(E, F)$ muni de la norme d'opérateurs) est continue on dit que f est C^1 .
- Si $x \mapsto Df(x)$ est dérivable son application linéaire tangente est une application continue de E dans $L_c(E, F)$ qu'on note $D^2f(x)$. Elle s'identifie avec une application bilinéaire continue de $E \times E \rightarrow F$.
- De la même façon on peut définir par récurrence la notion d'application de classe C^p ; $D^p f(x)$ est par nature une application p -linéaire continue de E^p dans F .

Rappels de calcul différentiel

Exemples

- L'application $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto A^2$ est dérivable et son application linéaire tangente en A est l'application linéaire $M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ qui à H associe $AH + HA$. En effet, $(A + H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$ et $H^2 = o(\|H\|)$.
- L'application $GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ est C^1 et sa différentielle en A est l'application linéaire $M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$, $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
- L'application $M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ est C^1 et sa différentielle en A est l'application linéaire $M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $H \mapsto \text{tr}(\text{Co}(A)^T H)$ ($\text{Co}(A)^T$ est la transposée de la co-matrice de A).
- Exemple en dimension infinie : L'application $u \mapsto \int_0^1 K(y, u(y)) dy$ de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ (muni de la norme du sup) vers $\mathbb{R}$ est de classe C^1 si K est elle-même C^1 .

Rappels de calcul différentiel

Exemples

- Si $f : E \times F \rightarrow G$ est telle que pour $y \in F$ fixé l'application $E \rightarrow G$, $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable, on note $D_1 f(x, y)$ ou $\partial_x f(x, y)$ sa dérivée en x . On parle alors de dérivée partielle.
- En **dimension finie**, Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ est C^1 , $Df(x)$ s'identifie avec la **matrice jacobienne** $Jf(x)$:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

- En outre en dimension quelconque si E, F, G sont des EVN, U ouvert de $E \times F$ et $f : U \rightarrow G$ **f est de classe C^1 si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues** sur U .

Rappels de calcul différentiel

Quelques propriétés utiles

- Composition** $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- Accroissements finis** : Si U est un ouvert convexe, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_U \|Df\| \cdot \|b - a\|$.
- Théorème de Schwarz** : Si f est p -fois dérivable $D^p f(x)$ est une application p -linéaire **symétrique**.
- Formules de Taylor (reste intégral)** Si U est un ouvert convexe et $f : U \rightarrow F$ est de classe C^{p+1} ; alors,

$$f(b) - f(a) - Df(a) \cdot (b - a) - \dots - \frac{1}{p!} D^{(p)} f(a) \cdot ((b - a))^p = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} D^{(p+1)} f(a + t(b-a)) \cdot ((b-a))^{p+1} dt.$$

- L'espace $C^p(U, F)$ muni de la norme $\|f\|_p = \max_{0 \leq k \leq p} \sup_{x \in U} \|D^k f(x)\|$ **est un espace de Banach**