M1 Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

Présentation
Introduction aux EDOs

Organisation du cours et ressources

- Les transparents (versions amphi et longues), feuilles de TD et listes d'errata sont disponibles en ligne `https://perso.u-cergy.fr/~rkrikorian/M1-SD-CYU-21-22.html`
- Evaluation : CCI
- email : raphael.krikorian@cyu.fr

Cours (Raphaël Krikorian) :

- Mercredi 10h15-11h45, Salle E2
- Jeudi 12h-13h30, Salle E3

TD

- Gr1 (Marjolaine Puël) : Mercredi 12h-13h30, Salle E214
- Gr2 (Raphaël Krikorian) : Mercredi 8h30-10h, Salle E2.

Sommaire

Plan du cours de Systèmes Dynamiques

- Introduction générale : divers exemples d'EDO, linéaire vs. non-linéaire, stabilité.
- Rappels de topologie, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
- Théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
- Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, critère d'existence et d'unicité globales, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire)
- E.D.O. à coefficients constants.
- E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations.
- E.D.O. linéaires à coefficients périodiques. Théorème de Floquet, résonnance paramétrique.
- Temps de vie des solutions, intervalle maximal, estimation de temps de vie.

Plan du cours M1-SD

- ODE non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations.
- Flots, champs de vecteurs, application de premier retour, application à la stabilité.
- Sous-variétés, espace tangent, point critique, champs de vecteurs sur les sous-variétés, sous-variétés à bord.
- Stabilité (critère de Routh, fonctions de Lyapunov), champs de vecteurs en dimension 2 (perturbations des applications conservatives et théorème de Poincaré-Bendixon)
- Redressement des flots, points fixes hyperboliques. Le théorème de la variété stable, théorème de Hartman-Grobman. Régularité et chaos.

Sommaire

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO) : modélisent de nombreux phénomènes d'évolution

- Mécanique Céleste : mouvements des astres, satellites...
- Physique : équations des ondes, de la chaleur, équation de Schrödinger (mécanique quantique)...
- Chimie : cinétique chimique, réaction-diffusion
- Electronique : oscillateurs linéaires (RLC) vs. non-linéaires
- Automatique : Théorie du contrôle et de la stabilisation...
- Economie / Finance : modèle IS-LM en macroéconomie
- Biologie : régulation cellulaire, cycle circadien, réseaux de neurones...
- Ecologie : modèles proies-prédateurs
- Epidémiologie : modèles compartimentaux SIR et ses généralisations ;
- Démographie : évolution des populations ;
- *etc.*

Exemples d'équations différentielles

Mécanique Céleste

L'exemple le plus ancien sont les équations de la Mécanique de **Newton** (*Principia Mathematica* 1687) :

$$= \text{Principe d'inertie quantitatif}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = F = \mathit{force} \\ p = m\dfrac{dx}{dt} = mv = \text{quantité de mouvement,} \end{cases}$$

En Mécanique céleste on complète ces équations par la Loi de la gravitation :

$$F_{2/1} = -K\frac{m_1 m_2}{\|x_1 - x_2\|^2}\,\frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}.$$

Exemples d'équations différentielles

Problème à N corps

Problème à N corps : $N \geqslant 2$ corps qui s'attirent suivant la loi de la gravitation

- $N = 2$: équivalent à deux problèmes à 1 corps dans un champ central gravitationnel. Newton montre que
  - Résolution **exacte** des équations du mouvement : on retrouve les 3 lois de Kepler (1571-1630).
  - Chaque corps décrit une **conique** (section d'un cône par un plan)
    - soit une **ellipse** : le mouvement est périodique.
    - soit une **hyperbole** : l'astre part à l'infini.
    - soit une **parabole** (cas limite) : l'astre part à l'infini.
- $N \geqslant 3$: beaucoup plus difficile et pas complètement compris :
  - **Poincaré** (1854-1912) démontre ($\approx$ 1890) que l'on ne peut pas trouver de formules exactes pour le mouvement des corps.
  - **Smale** (1930-) : ($\approx$ 1960) Existence de mouvements chaotiques.
  - **Kolmogorov** (1903-87), **Arnold** (1937-2010) et **Moser** (1928-99) : Théorie KAM ($\approx$ 1960) et existence de mouvements quasi-périodiques.

Exemples d'équations différentielles

Comportement hyperbolique vs. harmonique

- Comportement **hyperbolique** : exemple : dynamique d'une population de taille $N(t)$ (démographie (Malthus), radioactivité...)

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Solution :} \qquad N(t) = e^{\lambda t} N(0).$$

Comportement (trop) simple

- $\lambda > 0$: $N(t)$ tend vers l'infini exponentiellement vite ;
- $\lambda < 0$: $N(t)$ décroit exponentiellement vite vers 0 ;
- $\lambda = 0$: $N(t)$ est constant.

Exemples d'équations différentielles

Comportement hyperbolique vs. harmonique

- Comportement **harmonique** (périodique) : oscillateur harmonique. Exemples : masse liée à un ressort sans frottement, circuit LC (électronique), pendule linéarisé...

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Solution :} \qquad \begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Mouvement **périodique** de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Exemples d'équations différentielles

Oscillateur harmonique amorti et forcé

Exemple : circuit RLC, oscillateur harmonique avec frottement *etc.*

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}, \nu > 0.$$

$\longrightarrow$ les solution tendent exponentiellement vite vers 0

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \qquad \textbf{Stabilité asymptotique}.$$

On peut rajouter un terme de forçage (p. ex. $f(t) = a\sin(2\pi t/T)$)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = f(t), \qquad \omega \in \mathbb{R}, \nu > 0.$$

$\longrightarrow$ les solution tendent exponentiellement vite vers un **régime stationnaire** (p.ex. T-périodique).

Exemples d'équations différentielles

En dimension infinie

Equations aux dérivées partielles : EDO en dimension infinie.

- **Ondes :**

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

- **Chaleur :**

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

- **Schrödinger :**

$$i\hbar \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + V(x)u(x,t).$$

Importance des non-linéarités

Les modèles précédents sont **linéaires** et ont l'avantage de pouvoir être résolus explicitement.

Il est cependant fondamental de prendre en compte des **phénomènes non-linéaires**.

Exemples :

- Dynamique des populations :

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t), \qquad r, K > 0.$$

- Modèles proies-prédateurs : (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t)\Big(\alpha - \beta y(t)\Big) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = y(t)\Big(\delta x(t) - \gamma\Big) \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

Importance des non-linéarités

- Modèle SIR (épidémiologie) : (S : sain, I : infecté, R : guéri)

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -p \cdot I(t) \cdot S(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = p \cdot I(t) \cdot S(t) - \alpha \cdot I(t) \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \alpha \cdot I(t). \end{cases}$$

- Electronique : Résistance non-linéaire, Van der Pol...

$$\frac{d^2x(t)}{dt} - \epsilon\omega(1 - x(t)^2)\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0 \quad \text{ou} \quad f(t).$$

Importance des non-linéarités

De nouveaux phénomènes apparaissent.

- Dynamiques plus riches.
- Coexistence de comportements hyperbolique et périodiques.
- Apparition de dynamiques chaotiques.

Sommaire

Analyse des EDO

En général impossible de résoudre explicitement une EDO :

- comprendre comportement qualitatif ;
- ou décrire comportement(s) approché(s).

Utilisation de méthodes

- géométriques
- de méthodes analytiques : théorie des perurbations.

Concepts importants

- Existence et unicité des solutions.
- Temps de vie des solutions. Phénomènes d'explosion en temps fini.
- Existence d'équilibre, solutions périodiques.
- Stabilité / instabilité.
- Robustesse : que se passe-t-il si on perturbe un peu le système ?
- Bifurcations : comment le comportement des solutions d'une EDO peut changer ? $\longrightarrow$ importance des **résonances**.