CYU CERGY-PARIS UNIVERSITÉ

MASTER 1, 2021-22
SYSTÈMES DYNAMIQUES

Devoir Maison

A rendre le **8 décembre 2021**
Binômes autorisés

Exercice 1 On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue T-périodique et on considère l'EDO

$$x''(t) + f(t)x(t) = 0. \tag{1}$$

1) 1.a) Ecrire l'équation précédente sous la forme

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{2}$$

où on précisera la forme de la matrice $A(\cdot)$.

1.b) On note $R(t,0)$ la résolvante du système (2). Expliquer pourquoi $R(T,0) \in SL(2,\mathbb{R})$.

2) On suppose que l'EDO (1) admet une solution $x_*(\cdot)$ *non* bornée et à croissance au plus polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|x_*(t)| \leqslant a|t| + b$.

2.a) La matrice $R(T,0)$ peut-elle être elliptique ?

2.b) La matrice $R(T,0)$ peut-elle être hyperbolique ?

2.c) Démontrer que l'EDO (1) admet une solution non nulle qui est $2T$-périodique.

Solution –

1) 1.a) On trouve $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(t) & 0 \end{pmatrix} X(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

1.b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la trace de $A(t)$ est nulle. D'après le théorème de Liouville on a donc pour tout t, $\det R(t,0) = 1$. La matrice $R(T,0)$ est donc dans $SL(2,\mathbb{R})$.

2) 2.a) La matrice $R(T,0)$ ne peut pas être elliptique. Car sinon toutes les solutions de (2) seraient bornées, en particulier $X_*(\cdot) = \begin{pmatrix} x_*(\cdot) \\ x_*'(\cdot) \end{pmatrix}$, et $x_*(\cdot)$ serait alors bornée.

2.b) La matrice $R(T,0)$ ne peut pas être hyperbolique.

Supposons par l'absurde que $R(T,0)$ soit hyperbolique. Elle admet donc pour valeurs propres λ et λ^{-1} avec λ réel, $\lambda \neq 0$. On peut supposer que $|\lambda| >$

1. Notons $v_\pm \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ des vecteurs propres associés : $R(T,0)v_\pm = \lambda^{\pm 1}v_\pm$. Si $X_*(\cdot) = \begin{pmatrix} x_*(\cdot) \\ x_*'(\cdot) \end{pmatrix}$ on a

$$X_*(t) = R(t,0)X_*(0).$$

et en décomposant $X_*(0) = \mu_+ v_+ + \mu_- v_-$ avec $(\mu_+,\mu_-) \neq (0,0)$ (car X_* est non nulle) on a

$$X_*(nT) = R(nT,0)(\mu_+v_+ + \mu_-v_-) = R(T,0)^n(\mu_+v_+ + \mu_-v_-) = \lambda^n v_+ + \lambda^{-n}v_-.$$

Si on note $v_{\pm,1}$ les composantes suivant la première coordonnées de $v_\pm$ on a donc

$$x_*(nT) = \lambda^n v_{+,1} + \lambda^{-n}v_{-,1}.$$

Mais d'après l'hypothèse de croissance au plus polynomiale

$$\frac{1}{|n|}|\lambda^n v_{+,1} + \lambda^{-n}v_{-,1}| = \frac{1}{|n|}|x_*(nT)| \leqslant aT + (b/|n|).$$

Comme v_+ et v_- ne sont pas colinéaires, au moins un des deux nombres $v_{+,1}$ ou $v_{-,1}$ est non nul. En faisant tendre n vers $+\infty$, ou $-\infty$ on aboutit alors à une contradiction car $\lambda^{|n|}/|n|$ n'est pas borné ($|\lambda| > 1$).

2.c) La matrice $R(T,0)$ est donc parabolique. Elle admet une valeur propre qui est soit 1 soit -1. Si $w \neq 0$ est le vecteur propre associé on a donc soit $R(T,0)w = w$ ou $R(T,0)w = -w$. Dans tous les cas $R(T,0)^2 w = w$ et comme $R(2T,0) = R(T,0)^2$ cela donne $R(2T,0)w = w$. Si on pose $X(t) = R(t,0)w$ on voit que

$$X(t+2T) = R(t+2T,0)w = R(t+2T,2T)R(2T,0)w = R(t,0)w = X(t).$$

Si on écrit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, comme $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(t) & 0 \end{pmatrix} X(t)$, on a $x''(t) + f(t)x(t) = 0$ et $y(t) = x'(t)$. La solution $x(\cdot)$ est bien $2T$-périodique et non nulle (car $X(\cdot)$ est non nulle ; $w \neq 0$).

$\square$

Exercice 2 On considère l'EDO

$$\begin{cases} x'(t) &= ay(t) - x(t)^3 + \epsilon \\ y'(t) &= -ax(t) - y^2(t)\cos t - y^3(t) \end{cases} \tag{3}$$

où a et ϵ sont des paramètres réels.

1) Ecrire l'équation sous la forme

$$z'(t) = aJz(t) + F(z(t),t,\epsilon) \tag{4}$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et où $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

2) Démontrer que les solutions de l'équation (3) sont définies pour tout temps $t \geqslant 0$.

3) Pour $z_0 = (x_0, y_0)$ on note $\phi_\epsilon^{t,t_0}(z_0)$ la valeur au temps t de la solution de l'équation (3) ayant pour condition initiale $z_0 = (x_0, y_0)$ au temps t_0.

3.a) Rappeler pourquoi le fait que $\phi_\epsilon^{2\pi,0}(z_*) = z_*$ est équivalent au fait que $t \mapsto \phi_\epsilon^{t,0}(z_*)$ est une solution 2π-périodique de (3).

3.b) Si on suppose $\epsilon = 0$, que vaut $\phi_0^{t,0}(0)$?

4) Démontrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^2$, un $\epsilon_0 > 0$ et une constante C tels que pour $(z, \epsilon) \in V \times]-\epsilon_0, \epsilon_0[$, $t \in [0, 2\pi]$ on a

$$\phi_\epsilon^{t,0}(z) = Q(t)z + G(t)\epsilon + K(z, \epsilon, t),$$

où

$$\begin{cases} K \text{ est de classe } C^1 \\ \max_{t \in [0,2\pi]} \|K(z, \epsilon, t)\| \leqslant C(\|z\|^2 + \epsilon^2) \\ \forall\, t \in [0, 2\pi], \quad \partial_z K(0, 0, t) = 0, \quad \partial_\epsilon K(0, 0, t) = 0 \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos at & \sin at \\ -\sin at & \cos at \end{pmatrix}$$

et si $a \neq 0$,

$$G(t) = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \sin at \\ -1 + \cos at \end{pmatrix}.$$

Que vaut G si $a = 0$?

5) On suppose a non entier. Démontrer qu'il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon \in W$ l'équation (3) admet une solution 2π-périodique.

Solution – 1) On obtient

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x(t)^3 + \epsilon \\ -y(t)^2 \cos t - y(t)^3 \end{pmatrix}$$

et si on pose $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et

$$F : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t, \epsilon \right) \mapsto a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^3 + \epsilon \\ -y^2 \cos t - y^3 \end{pmatrix}$$

on a

$$z'(t) = F(z(t), t, \epsilon).$$

2) Il suffit d'appliquer le critère de Lyapunov à la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ sur un cercle de rayon R grand. On a

$$\left\langle \begin{pmatrix} ay - x^3 + \epsilon \\ -ax - y^2 \cos t - y^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = -(x^4 + y^4) + q(x, y, t)$$

où uniformément en t $|q(x,y,t)| \leqslant C(|x|^3+|y|^3)$; donc pour $x^2+y^2=R^2$ grand la quantité précédente est strictement négative.
3)

3.a) Cela est dû au fait que $z(\cdot-2\pi)$ et $z(\cdot)$ sont solutions de la même EDO et ont la même condition initiale. On conclut par le théorème d'unicité.

3.b) On vérifie que la solution nulle est bien solution de l'EDO si $\epsilon=0$ et donc $\phi_0^{t,0}(0)=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

4) D'après le théorème de dépendance différentiable par rapport aux conditions initiales et aux paramètres on sait qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^2$, un $\epsilon_0>0$ tels que l'application

$$\Psi : V\times]-\epsilon_0,\epsilon_0[\ni (z,\epsilon)\mapsto \phi_\epsilon^{\cdot\ ,\ 0}(z)\in C^1([0,2\pi],\mathbb{R}^2)$$

est de classe C^2.

On peut donc écrire

$$\Psi(z,\epsilon)=\Psi(0,0)+\partial_z\Psi(0,0)\cdot z+\partial_\epsilon\Psi(0,0)\epsilon+O(|z|^2+\epsilon^2). \qquad (*)$$

Pour déterminer $D\psi(0,0)\cdot(z,\epsilon)=\partial_z\Psi(0,0)\cdot z+\partial_\epsilon\Psi(0,0)\epsilon$ on utilise le théorème de linéarisation au voisinage de la solution $t\mapsto\phi_0^{t,0}(0)$ qui d'après la question 3.b) est nulle : $D\psi(0,0)\cdot(z,\epsilon)$ est la solution de l'EDO affine

$$w'(t)=D_zF(0,t,0)w(t)+D_\epsilon F(0,t,0)\epsilon, \qquad w(0)=z$$

c'est-à-dire

$$w'(t)=aJw(t)+\epsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad w(0)=z$$

qui vaut si $a\neq 0$ (variation de la constante)

$$w(t)=e^{taJ}z+\int_0^t e^{aJ(t-s)}\epsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}ds$$

soit

$$w(t)=\begin{pmatrix}\cos at & \sin at\\ -\sin at & \cos at\end{pmatrix}z+\frac{\epsilon}{a}\begin{pmatrix}\sin at\\ -1+\cos at\end{pmatrix}.$$

Si $a=0$ on trouve

$$w(t)=z+\epsilon\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}.$$

Revenant à $(*)$ on a donc démontré que

$$\phi_\epsilon^{t,0}(z)=Q(t)z+G(t)\epsilon+K(z,\epsilon,t)$$

avec K de classe C^1 en (z,ϵ,t)

$$\begin{cases}\max_{t\in[0,2\pi]}\|K(z,\epsilon,t)\|\leqslant C(\|z\|^2+|\epsilon|^2) & (C \text{ est une constante} >0)\\ \forall\ t\in[0,2\pi],\quad D_{(z,\epsilon)}K(0,0,t)=0\end{cases}$$

et si $a \neq 0$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos at & \sin at \\ -\sin at & \cos at \end{pmatrix}, \qquad G(t) = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} \sin at \\ -1 + \cos at \end{pmatrix}.$$

Si $a = 0$

$$Q(t) = I, \qquad G(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5) D'après la question 3.a) $z(\cdot)$ est 2π-périodique si et seulement si on a $z(2\pi) = z(0)$. D'après la question 4) ceci est équivalent à

$$0 = (Q(2\pi) - I)z(0) + G(2\pi)\epsilon + K(z(0), \epsilon, 2\pi).$$

On applique le théorème des fonctions implicites à la fonction de classe C^1

$$H(z, \epsilon) = (Q(2\pi) - I)z + G(2\pi)\epsilon + K(z, \epsilon, 2\pi).$$

Comme $H(0,0) = 0$ et $D_z H(0,0) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi a) & \sin(2\pi a) \\ -\sin(2\pi a) & \cos(2\pi a) \end{pmatrix} - I$ (on utilise le fait que $\partial_z K(0,0,2\pi) = 0$) est bien inversible ($a \notin \mathbb{Z}$), on déduit du TFI qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ et $]-\epsilon_1, \epsilon_1[\ni \epsilon \mapsto z_\epsilon \in \mathbb{R}^2$ de classe C^1 telle que

$$H(z_\epsilon, \epsilon) = 0.$$

Si on pose $z_\epsilon(t) = \phi^{t,0}(z_\epsilon)$ on a bien

$$0 = (Q(2\pi) - I)z_\epsilon(0) + G(2\pi)\epsilon + K(z_\epsilon(0), \epsilon, 2\pi)$$

et donc $z_\epsilon(\cdot)$ est 2π-périodique.

$\square$

FIN