

CYU CERGY-PARIS UNIVERSITÉ

MASTER 1, 2021-22
SYSTÈMES DYNAMIQUES

Devoir Maison

A rendre le **17 novembre 2021**
Binômes autorisés

Exercice 1 1) Déterminer les solutions de l'équation différentielle scalaire

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 4x(t) = 0 \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer les solutions de l'équation différentielle scalaire

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 4x(t) = f(t) \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

[On pourra utiliser la formule de variation de la constante.]

Solution – 1) Le polynôme $x^2 - 4x + 4$ égale $(x - 2)^2$ donc les solutions sont de la forme

$$x(t) = (at + b)e^{2t}.$$

Pour déterminer a et b on utilise les conditions initiales :

$$x(0) = b, \quad \dot{x}(0) = a + 2b$$

d'où $b = 0$, $a = 1$ et

$$x(t) = te^{2t}.$$

2) On utilise la méthode de variation de la constante. On écrit

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

La résolvante de

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

est donnée par

$$R(t, s) = \exp\left((t-s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\right).$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice compagnon et son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique qui lui-même est égal à $(T-2)^2$. Elle s'écrit donc sous la forme $S + N$ où

$$S = P \operatorname{diag}(2, 2) P^{-1} = 2I$$

et

$$N = A - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

est nilpotente d'ordre 2. On a donc

$$\begin{aligned} R(t, s) &= \exp\left((t-s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ &= e^{(t-s)2I} e^{(t-s)N} \\ &= e^{2(t-s)} (I + (t-s)N) \\ &= e^{2(t-s)} \begin{pmatrix} 1 - 2(t-s) & t-s \\ -4(t-s) & 1 + 2(t-s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'après la formule de variation de la constante

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} &= R(t, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t R(t, s) \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 - 2t & t \\ -4t & 1 + 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{2(t-s)} \begin{pmatrix} 1 - 2(t-s) & t-s \\ -4(t-s) & 1 + 2(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

si bien que

$$x(t) = te^{2t} + \int_0^t e^{2(t-s)} (t-s) f(s) ds.$$

□

Exercice 2 On considère le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + \frac{x(t)y(t)^2}{1+x(t)^2+y(t)^2} \\ y'(t) = -y(t) - \frac{x(t)^2 y(t)}{1+x(t)^2+y(t)^2}. \end{cases} \quad (1)$$

1) Démontrer que toute solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ de (1) est définie pour tout temps $t \in \mathbb{R}$.

2) Démontrer que 0 est asymptotiquement stable quand $t \rightarrow \infty$: toute solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ de (1) vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max(|x(t)|, |y(t)|) = 0.$$

[On pourra calculer $\frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2)$.]

Solution –

1) Posons

$$f(x, y) = \left(-x + \frac{xy^2}{1+x^2+y^2}, -y - \frac{x^2y}{1+x^2+y^2}\right).$$

On voit que

$$\|f(x, y)\| \leq \text{cste} \times (|x| + |y| + |x|\frac{y^2}{1+y^2} + |y|\frac{x^2}{1+x^2})$$

donc

$$\|f(x, y)\| \leq \text{cste} \times \|(x, y)\|.$$

La fonction f est à croissance au plus linéaire et d'après le cours les solutions de (1) sont définies pour tout temps.

2) On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2) &= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \\ &= -2(x(t)^2 + y(t)^2). \end{aligned}$$

Si on pose $r(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ on a donc

$$r'(t) = -2r(t)$$

et donc

$$r(t) = e^{-2t}r(0).$$

On a ainsi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$$

ce qui implique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max(|x(t)|, |y(t)|) = 0.$$

□

Exercice 3

1) 1.a) On suppose que $a > 0$ et $b \geq 0$ sont des réels et que $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et vérifie

$$\begin{cases} \forall t \geq 0, & M'(t) \leq aM(t) + b \\ M(0) = 0. \end{cases}$$

Démontrer que

$$\forall t \geq 0, \quad M(t) \leq b \frac{e^{at} - 1}{a} \quad \text{et} \quad M'(t) \leq be^{at}.$$

[On pourra dériver la quantité $e^{-at}M(t)$.]

1.b) En déduire que si $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifie

$$\forall t \geq 0, \quad m(t) \leq a \int_0^t m(s)ds + b$$

on a

$$\forall t \geq 0, \quad m(t) \leq be^{at}.$$

1.c) On suppose que $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est solution de

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + g(t)$$

où $A \in C^0(\mathbb{R}, M(n, \mathbb{R}))$, $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Démontrer que

$$\sup_{t \in [0,1]} \|Y(t)\| \leq e^{\sup_{t \in [0,1]} \|A(t)\|} \left(\|Y(0)\| + \sup_{t \in [0,1]} \|g(t)\| \right).$$

(Si M est une matrice de $M(n, \mathbb{R})$ on a noté $\|M\|$ sa norme d'opérateur $\|M\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \|Mv\|/\|v\|$.)

2) On considère le problème de Cauchy

$$X'(t) = (A + \epsilon F(t))X(t), \quad X(0) = v. \quad (2)$$

où $A \in M(n, \mathbb{R})$, $F \in C^0(\mathbb{R}, M(n, \mathbb{R}))$, $v \in \mathbb{R}^n$ et $\epsilon \in \mathbb{R}$.

2.a) Rappeler pourquoi (2) admet une solution unique $X^{(\epsilon)}(\cdot)$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2.b) On définit X_0 et X_1 solutions respectives de

$$X_0'(t) = AX_0(t), \quad X_0 = v$$

$$X_1'(t) = AX_1(t) + F(t)X_0(t), \quad X_1(0) = 0$$

et on pose

$$Y_\epsilon(t) = X^{(\epsilon)}(t) - X_0(t) - \epsilon X_1(t).$$

Démontrer que Y_ϵ vérifie l'EDO

$$Y_\epsilon'(t) = (A + \epsilon F(t))Y_\epsilon(t) + \epsilon^2 F(t)Y_1(t).$$

2.c) En utilisant les résultats de la question 1) démontrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $\epsilon \in [-1, 1]$

$$\sup_{t \in [0,1]} \|Y_\epsilon(t)\| \leq C\epsilon^2$$

c'est-à-dire

$$X^{(\epsilon)}(t) = X_0(t) + \epsilon X_1(t) + O(\epsilon^2).$$

3) On considère l'EDO

$$X'(t) = \left(\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} + \epsilon \cos^2(2\pi t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) X(t). \quad (3)$$

3.a) En utilisant les résultats de la question 2) démontrer que si $X^{(\epsilon)}(\cdot)$ est la solution de (3) telle que $X^{(\epsilon)}(0) = v$ on a

$$X^{(\epsilon)}(1) = (1 + \epsilon/2)v + O(\epsilon^2).$$

3.b) On note $R_\epsilon(t, 0)$ la résolvante de (3). Démontrer que

$$R_\epsilon(1, 0) = (1 + \epsilon/2)I + O(\epsilon^2).$$

3.c) Discuter la stabilité et la stabilité asymptotique en $t \rightarrow \pm\infty$ de l'EDO (3) en fonction de ϵ .

Solution –

1) 1.a) On a

$$(e^{-at}M(t))' = e^{-at}(M'(t) - aM(t)) \leq be^{-at}$$

et en intégrant entre 0 et t (on a supposé $M(0) = 0$)

$$e^{-at}M(t) \leq b \int_0^t e^{-as} ds = b[-e^{-as}/a]_0^t = b(1 - e^{-at})/a$$

d'où

$$M(t) \leq (b/a)(e^{at} - 1).$$

Comme $M'(t) \leq aM(t) + b$ on obtient aussi

$$M'(t) \leq a(b/a)(e^{at} - 1) + b \leq be^{at}.$$

1.b) On applique la question précédente à $M(t) = \int_0^t m(s) ds$ pour obtenir

$$M'(t) \leq aM(t) + b$$

et donc

$$m(t) = M'(t) \leq be^{at}.$$

1.c) On a

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t A(s)y(s)ds + \int_0^t g(s)ds$$

et donc

$$\|Y(t)\| \leq \int_0^t \|A(s)\| \|Y(s)\| ds + (\|Y(0)\| + \int_0^t \|g(s)\| ds).$$

Si on pose

$$m(t) = \|Y(t)\|, \quad a = \sup_{s \in [0,1]} \|A(s)\|, \quad b = \|Y(0)\| + \sup_{s \in [0,1]} \|g(s)\|$$

on a pour $t \in [0, 1]$

$$m(t) \leq a \int_0^t m(s) ds + b$$

et donc d'après la question précédente

$$m(t) \leq be^{at} \leq be^a.$$

2) 2.a) C'est du cours. Il s'agit d'une EDO affine.

2.b) On a

$$\begin{aligned} Y'_\epsilon(t) &= (X^{(\epsilon)})'(t) - X'_0(t) - \epsilon X'_1(t) \\ &= (A + \epsilon F(t))(X_0(t) + \epsilon X_1(t) + Y_\epsilon(t)) - AX_0(t) - \epsilon(AX_1(t) + F(t)X_0(t)) \\ &= (A + \epsilon F(t))Y_\epsilon(t) + \epsilon^2 F(t)X_1(t). \end{aligned}$$

2.c) D'après 1.c) on a

$$\sup_{t \in [0,1]} \|Y(t)\| \leq e^{\sup_{t \in [0,1]} \|A + \epsilon F(t)\|} \left(\|Y_\epsilon(0)\| + \sup_{t \in [0,1]} \epsilon^2 \|F(t)X_1(t)\| \right).$$

On constate que

$$Y_\epsilon(0) = X^{(\epsilon)}(0) - X_0(0) - \epsilon X_1(0) = v - v - \epsilon \times 0 = 0$$

si bien que pour $|\epsilon| \leq 1$

$$\sup_{t \in [0,1]} \|Y_\epsilon(t)\| \leq C\epsilon^2$$

où on a posé

$$C = e^{\|A\| + \sup_{t \in [0,1]} \|F(t)\|} \sup_{t \in [0,1]} \|F(t)X_1(t)\|.$$

3) 3.a) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \cos^2(2\pi t)I$$

et on introduit X_0 et X_1 solutions respectives de

$$\begin{aligned} X_0'(t) &= AX_0(t), & X_0 &= v \\ X_1'(t) &= AX_1(t) + F(t)X_0(t), & X_1(0) &= 0. \end{aligned}$$

On obtient

$$X_0(t) = e^{tA}v = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix} v$$

et par la formule de variation de la constante

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(2\pi(t-s)) & -\sin(2\pi(t-s)) \\ \sin(2\pi(t-s)) & \cos(2\pi(t-s)) \end{pmatrix} \cos^2(2\pi s) \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) & -\sin(2\pi s) \\ \sin(2\pi s) & \cos(2\pi s) \end{pmatrix} v ds \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix} \int_0^1 \cos^2(2\pi s) ds v \\ &= (1/2) \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix} v. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$X^{(\epsilon)}(1) = X_0(1) + \epsilon X_1(1) + O(\epsilon^2)$$

soit

$$X^{(\epsilon)}(1) = v + (\epsilon/2)v + O(\epsilon^2).$$

3.b) Si on choisit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on voit que

$$R_\epsilon(1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon/2 \\ 0 \end{pmatrix} + O(\epsilon^2), \quad R_\epsilon(1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \epsilon/2 \end{pmatrix} + O(\epsilon^2)$$

et donc

$$R_\epsilon(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon/2 & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon/2 \end{pmatrix} + O(\epsilon^2).$$

3.c) On peut écrire

$$R_\epsilon(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2) & O(\epsilon^2) \\ O(\epsilon^2) & 1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $R_\epsilon(1, 0)$ sont donc racines de

$$T^2 - (2 + \epsilon + O(\epsilon^2))T - (1 + \epsilon + O(\epsilon^2)) = 0$$

donc de la forme

$$1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2)$$

où $O(\epsilon^2)$ peut être réel ou complexe. Leurs parties réelles sont donc de la forme $1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2)$.

- Si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit $1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2) > 0$. L'origine est donc instable quand $t \rightarrow \infty$, mais asymptotiquement stable quand $t \rightarrow -\infty$.
- Si $\epsilon < 0$ est suffisamment petit $1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2) < 0$. L'origine est donc instable quand $t \rightarrow -\infty$, mais asymptotiquement stable quand $t \rightarrow \infty$.
- Si $\epsilon = 0$, on voit que $R_\epsilon(1, 0)$ est la matrice identité ($A + \epsilon F = A$) donc le système est stable (en $\pm\infty$) mais pas asymptotiquement stable (ni en $+\infty$ ni en $-\infty$).

□

Exercice 4 Soit $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\begin{cases} (i) & \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad a(t+1, x) = a(t, x) \\ (ii) & \kappa := \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial a}{\partial x}(t, x) \right| < 1/2. \end{cases}$$

On définit E l'espace des fonctions $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0 qui sont 1-périodiques (i.e. $\forall t \in \mathbb{R}, x(t+1) = x(t)$) et on munit E de la norme du sup :

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|.$$

1) Démontrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

2) 2.a) On suppose que $f \in E$. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int_t^{t+1} f(s) ds = \int_0^1 f(s) ds.$$

2.b) On note Φ l'application qui à une fonction $x(\cdot)$ de E associe la fonction $y = \Phi(x)$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x)(t) = y(t) = \int_0^t a(s, x(s)) ds - \left(\int_0^1 a(s, x(s)) ds \right) t.$$

Démontrer que Φ envoie E dans E .

[On vérifiera au préalable que si $x(\cdot)$ est 1-périodique la fonction $s \mapsto a(s, x(s))$ est également 1-périodique.]

3) Démontrer que Φ admet un unique point fixe dans E .

4) En utilisant la question précédente, démontrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que l'EDO

$$x'(t) = a(t, x(t)) - m$$

admet une solution 1-périodique.

5) Démontrer qu'il existe une application $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto m(\lambda) \in \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'EDO

$$x'(t) = \cos(2\pi t) + \ln(1 + \lambda^2 + \frac{x(t)^2}{9}) - m(\lambda)$$

admet une solution 1-périodique.

[On vérifiera dans un premier temps que la fonction $a_\lambda(t, x) = \cos(2\pi t) + \ln(1 + \lambda^2 + \frac{x(t)^2}{9})$ vérifie les conditions (i) et (ii) du début de l'exercice.]

6)* Démontrer qu'il existe une application $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto m(\lambda) \in \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'EDO

$$x'(t) = \cos(2\pi t) + \ln(1 + \lambda^2 + \frac{x(t)^2}{9}) - m(\lambda)$$

admet une solution 1-périodique.

Solution –

1) Il suffit de vérifier que E est fermé dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui, muni de la norme du sup, est un Banach : si $x_n(\cdot)$ est une suite de fonctions continues 1-périodiques convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $x(\cdot)$ alors $x(\cdot)$ est également continue et 1-périodique.

2) 2.a) La fonction $t \mapsto \int_t^{t+1} f(s)ds = \int_0^{t+1} f(s)ds - \int_0^t f(s)ds$ est constante car sa dérivée vaut $f(t+1) - f(t)$ qui est identiquement nulle (f est 1-périodique).

2.b) Le fait que la fonction $y = \Phi(x)$ est continue est clair. Démontrons qu'elle est 1-périodique. Pour cela on observe que

$$f : s \mapsto a(s, x(s))$$

est 1-périodique puisque

$$a(s+1, x(s+1)) = a(s, x(s+1)) = a(s, x(s)).$$

D'après 2.a), on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int_t^{t+1} a(s, x(s))ds = \int_0^1 a(s, x(s))ds.$$

Mais comme

$$y(t+1) - y(t) = \int_t^{t+1} a(s, x(s))ds - \int_0^1 a(s, x(s))ds,$$

on voit que $y(t+1) - y(t) = 0$, c'est-à-dire $y(\cdot)$ est 1-périodique.

3) On pense à utiliser le théorème du point fixe de Picard à $\Phi : E \rightarrow E$. Pour cela, il suffit de démontrer que Φ est contractante (on sait d'après 2.b) que Φ envoie le Banach $(E, \|\cdot\|)$ dans lui-même).

Soient $x_1, x_2 \in E$; on a

$$\begin{aligned} \Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t) &= \int_0^t \left(a(s, x_1(s)) - a(s, x_2(s)) \right) ds + \\ &\quad \left(\int_0^1 \left(a(s, x_1(s)) - a(s, x_2(s)) \right) ds \right) t. \end{aligned} \quad (4)$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on voit que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \left(a(s, x_1(s)) - a(s, x_2(s)) \right) ds \right| &\leq \int_0^t \left| a(s, x_1(s)) - a(s, x_2(s)) \right| ds \\ &\leq \int_0^t \left| \sup_{y \in \mathbb{R}} \frac{\partial a}{\partial x}(s, y) \right| \times |x_1(s) - x_2(s)| ds \\ &\leq t \times \kappa \times \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

et donc pour tout $t \in [0, 1]$ on a par l'inégalité triangulaire appliquée à (4)

$$|\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)| \leq 2\kappa \|x_1 - x_2\|.$$

Cela montre que

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| = \sup_{t \in [0, 1]} |\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)| \leq 2\kappa \|x_1 - x_2\|.$$

Comme par hypothèse $2\kappa < 1$, l'application Φ est contractante.

Elle admet donc un (unique) point fixe $x(\cdot)$ dans E .

4) Si $x(\cdot)$ est ce point fixe

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \int_0^t a(s, x(s)) ds - \left(\int_0^1 a(s, x(s)) ds \right) t.$$

La formule montre que la fonction $x(\cdot)$ est en fait C^1 et en dérivant par rapport à t on voit que

$$x'(t) = a(t, x(t)) - \int_0^1 a(s, x(s)) ds.$$

Il suffit de poser

$$m = \int_0^1 a(s, x(s)) ds$$

5) On pose

$$a_\lambda(t, x) = a(\lambda, t, x) = \cos(2\pi t) + \ln(1 + \lambda^2 + \frac{x^2}{9})$$

et on constate que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial a}{\partial x}(\lambda, t, x) \right| &= \left| \frac{(2/9)x}{1 + \lambda^2 + \frac{x^2}{9}} \right| \\ &\leq \frac{2|x|}{9 + x^2} \\ &\leq 1/3 \end{aligned} \tag{5}$$

car $x^2 + 9 - 6|x| = (|x| - 3)^2 \geq 0$.

Comme $1/3 < 1/2$ on voit que pour tout λ fixé les hypothèses (i) et (ii) du début de l'exercice sont satisfaites par a_λ .

Notons $\Phi_\lambda : E \rightarrow E$ l'application définie comme dans la question 2.b) avec a_λ à la place de a . On va

1. Appliquer le théorème du point fixe à paramètre version C^0 à Φ_λ pour obtenir une fonction $x_\lambda \in E$ telle que $\Phi_\lambda(x_\lambda) = x_\lambda$.
2. Procéder comme dans la question 4) pour obtenir que x_λ est solution de l'EDO

$$x'_\lambda(t) = a_\lambda(t, x_\lambda(t)) - m(\lambda)$$

où

$$m(\lambda) = \int_0^1 a_\lambda(s, x_\lambda(s)) ds.$$

Comme x_λ dépend C^0 de λ et que a est C^0 il en sera de même de $\lambda \mapsto m(\lambda)$.

Montrons déjà que $\mathbb{R} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto \Phi_\lambda(x) \in E$ est continue.

On a

$$\Phi_\lambda(x) = \left(t \mapsto \int_0^t a(\lambda, s, x(s)) ds - \left(\int_0^1 a(\lambda, s, x(s)) ds \right) t \right)$$

et on voit que si $x_n \in E$ converge uniformément vers x et $\lambda_n \in \mathbb{R}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $s \mapsto a(\lambda_n, s, x_n(s))$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $a(\lambda, s, x(s))$ (cela résulte de l'uniforme continuité de a sur tout compact). En conséquence, la suite de fonctions $[0, 1] \ni t \mapsto \int_0^t a(\lambda_n, s, x_n(s)) ds$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $[0, 1] \ni t \mapsto \int_0^t a(\lambda, s, x(s)) ds$ et de la même manière la suite de fonctions $[0, 1] \ni t \mapsto t \int_0^1 a(\lambda_n, s, x_n(s)) ds$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $[0, 1] \ni t \mapsto t \int_0^1 a(\lambda, s, x(s)) ds$. Par conséquent $\Phi_{\lambda_n}(x_n)$ converge uniformément vers $\Phi_\lambda(x)$.

L'inégalité (5) montre comme dans la question 3) que Φ_λ est $2/3$ contractante et on peut donc appliquer le théorème du point fixe à paramètre (version C^0). Il existe ainsi $E \ni \lambda \mapsto x_\lambda \in E$ continue telle que

$$x_\lambda = \Phi_\lambda(x_\lambda)$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_\lambda(t) = \int_0^t a_\lambda(s, x_\lambda(s)) ds - \left(\int_0^1 a_\lambda(s, x_\lambda(s)) ds \right) t.$$

Le théorème de dépendance continue dans les intégrales montre que

$$\lambda \mapsto m(\lambda) := \left(\int_0^1 a_\lambda(s, x_\lambda(s)) ds \right)$$

est continue et en dérivant en t

$$x'_\lambda(t) = a_\lambda(t, x_\lambda(t)) - m(\lambda).$$

Comme $x_\lambda \in E$ elle est 1-périodique.

6) On va à présent appliquer le théorème du point fixe version C^1 .

Montrons déjà que $\mathbb{R} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto \Phi_\lambda(x) \in E$ est C^1 . Pour cela il faut vérifier qu'elle est dérivable et que sa dérivée est continue.

Comme a est de classe C^1 on peut écrire pour $x, h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a(\lambda, s, x + h) &= a(\lambda, s, x) + \int_x^{x+h} \partial_x a(\lambda, s, u) du \\ &= a(\lambda, s, x) + \int_0^1 \partial_x a(\lambda, s, x + vh) h dv \end{aligned}$$

où pour obtenir la dernière ligne on a fait un changement de variable. On a donc

$$\begin{aligned} a(\lambda, s, x + h) &= a(\lambda, s, x) + \int_0^1 \partial_x a(\lambda, s, x + vh) h dv \\ &= a(\lambda, s, x) + \partial_x a(\lambda, s, x) h + \epsilon(\lambda, s, x, h) \times h. \end{aligned}$$

où

$$\epsilon(\lambda, s, x, h) = \int_0^1 (\partial_x a(\lambda, s, x + vh) - \partial_x a(\lambda, s, x)) dv.$$

Comme $(\lambda, s, y) \mapsto \partial_x a(\lambda, s, y)$ est continue, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^3$ il existe une fonction $h \mapsto \epsilon_K(h)$ qui tend vers 0 avec h

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_K(h) = 0$$

telle que

$$\forall (\lambda, s, x) \in K, \quad |\epsilon(\lambda, s, x, h)| \leq \epsilon_K(h).$$

On peut donc écrire pour tout $(\lambda, s, x) \in K$

$$|a(\lambda, s, x + h) - a(\lambda, s, x) - \partial_x a(\lambda, s, x) h| \leq |h| \epsilon_K(h).$$

Soient à présent $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x(\cdot) \in E$ fixés. Posons

$$\begin{aligned} K &= [\lambda - 1, \lambda + 1] \times [0, 1] \times x(\mathbb{R}) \\ &= [\lambda - 1, \lambda + 1] \times [0, 1] \times x([0, 1]) \end{aligned}$$

car $x(\cdot)$ est 1-périodique. Comme $x([0, 1])$ est l'image d'un compact par une application continue, il est compact et K qui est un produit de compacts est également compact.

Fixons à présent $x(\cdot) \in E$ et considérons $h(\cdot) \in E$. Pour tout $s \in [0, 1]$ on a alors

$$|a(\lambda, s, x(s) + h(s)) - a(\lambda, s, x(s)) - \partial_x a(\lambda, s, x(s))h(s)| \leq |h(s)|\epsilon_K(h(s)).$$

En intégrant par rapport à s on obtient

$$\left| \int_0^t a(\lambda, s, x(s) + h(s))ds - \int_0^t a(\lambda, s, x(s))ds - \int_0^t \partial_x a(\lambda, s, x(s))h(s)ds \right| \leq \int_0^t |h(s)|\epsilon_K(h(s))ds.$$

Cette inégalité vaut en particulier pour $t = 1$ et tout $t \in [0, 1]$ si bien qu'en se rappelant la définition de Φ_λ on obtient

$$\begin{aligned} \|\Phi_\lambda(x + h) - \Phi_\lambda(x) - L(x) \cdot h\| &= \sup_{t \in [0, 1]} \left| \left(\Phi_\lambda(x + h) - \Phi_\lambda(x) - L(x) \cdot h \right)(t) \right| \\ &\leq 2\|h\|\tilde{\epsilon}_K(h) \end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} L(x) \cdot h &= \left(t \mapsto \int_0^t \partial_x a(\lambda, s, x(s))h(s)ds - t \int_0^1 \partial_x a(\lambda, s, x(s))h(s)ds \right) \\ \tilde{\epsilon}_K(h) &= \int_0^1 |\epsilon_K(h(s))|ds. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

$$L : E \mapsto E$$

est une application linéaire continue car elle est bornée :

$$\|L(x) \cdot h\| \leq (2/3)\|h\|$$

(on a utilisé (5)) et que

$$\lim_{E \ni h \rightarrow 0} \tilde{\epsilon}_K(h) = 0.$$

Nous avons donc bien démontré que pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto \Phi_\lambda(x)$ est dérivable en tout point x de E et

$$D_x \Phi_\lambda(x) \cdot h = L(x) \cdot h.$$

L'application $E \ni x \mapsto L(x) \in \mathcal{L}_c(E, E)$ est également continue donc Φ_λ est C^1 par rapport à x . On démontrerait de la même manière (c'est plus facile) que pour tout x fixé $\lambda \mapsto \Phi_\lambda(x)$ est C^1 . Ainsi,

$$\mathbb{R} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto \Phi_\lambda(x) \in E$$

est bien C^1 (elle est C^1 par rapport à chacune des variables).

Les hypothèses du théorème du point fixe à paramètre (version C^1) sont donc vérifiées car

$$\|D_x \Phi_\lambda\|_{op} \leq 2/3 < 1.$$

Il existe ainsi $E \ni \lambda \mapsto x_\lambda \in E$ de classe C^1 telle que

$$x_\lambda = \Phi_\lambda(x_\lambda)$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_\lambda(t) = \int_0^t a_\lambda(s, x_\lambda(s)) ds - \left(\int_0^1 a_\lambda(s, x_\lambda(s)) ds \right) t.$$

Le théorème de dépendance dérivable dans les intégrales montre que

$$\lambda \mapsto m(\lambda) := \left(\int_0^1 a_\lambda(s, x_\lambda(s)) ds \right)$$

est C^1 et on a en plus en dérivant en t

$$x'_\lambda(t) = a_\lambda(t, x_\lambda(t)) - m(\lambda).$$

Comme $x_\lambda \in E$ elle est 1-périodique. □