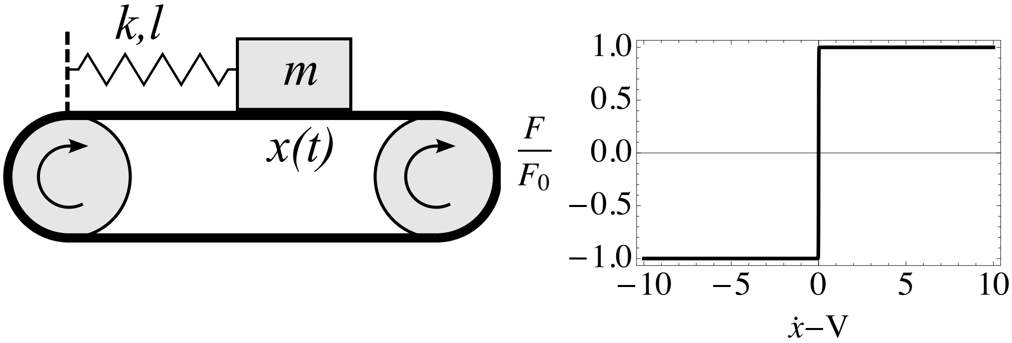
Université de Nice	2011-2012
Licence L3	

Dynamique non linéaire
Contrôle

1 Portrait de phase

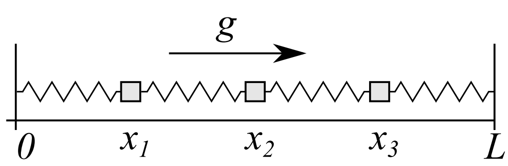
On considère une masse m qui frotte sur une tapis roulant avec une force de friction solide $F(\dot{x}(t) - V)$, où $x(t)$ est la position de la masse dans le référentiel du laboratoire et V la vitesse du tapis roulant. La masse est également attachée à l'origine avec un ressort de constante de raideur k et de longueur à l'équilibre l_0.



1. Ecrire l'équation prédisant la dynamique de la masse m
2. Rendre le système adimensionnel en choisissant comme longueur et temps caractéristiques l_0 et $\sqrt{m/k}$.
3. Quels sont le paramètres de contrôle ?
4. Dessiner le portrait de phase.

2 Dynamique d'oscillateurs couplés

Dans ce problème, on considère 3 masses m et 4 ressorts de constante de raideur k, de longueur à l'équilibre l. Ces masses ne peuvent se déplacer que verticalement, i.e. tangentiellement à l'accélération gravitationnelle g :



1. Ecrire l'énergie cinétique du système
2. Ecrire l'énergie potentielle du système (ressorts et gravité)
3. En déduire le Lagrangien
4. Dériver les équations d'Euler-Lagrange.
5. Rendre le système adimensionnel en utilisant comme longueur caractéristique l, un temps caractéristique $\sqrt{m/k}$. On montrera que deux paramètres de contrôle $\mu = gm/(kl)$, et $\lambda = L/l$ apparaissent.
6. Trouver les points d'équilibre.
7. Trouver les fréquences d'oscillations du système
8. En déduire les modes de vibrations de l'ensemble.

3 Bifurcations

Dans cet exercice, nous allons étudier un circuit électrique non-linéaire qui s'appelle l'oscillateur de van der Pol. Ce dernier s'écrit :

$$\ddot{x} + \dot{x}\left(-\mu + x^2\right) - \varepsilon x - x^3 = 0. \tag{1}$$

Trouver les points fixes de ce système.

3.1 $\mu < 0$

Nous supposons ici, que le paramètre μ est négatif et grand devant 1.

1. Faire l'analyse de stabilité linéaire des points fixes.
2. Que se passe t'il quand $\varepsilon = 0$
3. Dessiner le diagramme de bifurcation.

3.2 Sans dissipation

Nous nous interressons ici au portrait de phase de l'oscillateur de van-der-Pol lorsque le terme dissipatif est négligeable :

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0. \tag{2}$$

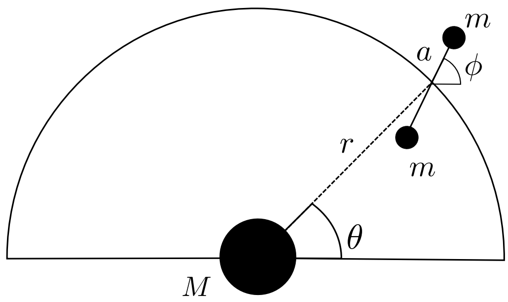
Dessiner le portrait de phase de ce système simplifié.

Université de Nice	**2010-2011**
Licence L3	

Dynamique non linéaire
Examen

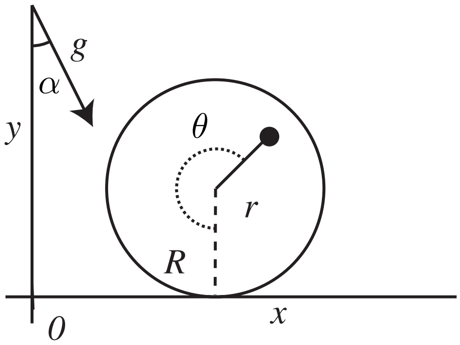
1 La face cachée de la lune : un haltère en orbite

On considère un satellite en forme d'haltère, en orbite autour de la terre (de masse M). Le satellite est constitué de deux masses identiques m reliées par une tige sans masse de longueur $2a$, $2a \ll r$. On note O le centre de gravité de la terre et C le centre de masse du satellite repéré avec le vecteur $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OC}$. Enfin, on note θ l'angle entre $\overrightarrow{r}$ et la direction horizontale. La tige est inclinée avec un angle ϕ, mesuré par rapport à la direction horizontale.



1. Ecrire le Lagrangien du système sous la forme
$$\mathcal{L} = T_{CM} + T_{rot} - V(r_1, r_2),$$
avec T_{CM}, l'énergie cinétique de la position du centre de masse, T_{rot}, l'énergie cinétique induite par la rotation de l'haltère, et $V(r_1, r_2)$, l'énergie potentielle de gravitation pour les deux masses, distantes de r_1 et de r_2 de la terre.
2. Expliciter les r_i en fonction de r, a et ϕ. Montrer alors que l'énergie potentielle s'écrit :
$$V(r_1, r_2) = -\frac{2\mathcal{G}Mm}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 (1 + 3\cos 2(\theta - \phi))\right),$$
pour cela on utilisera le DL suivant :
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2 + o(x^3)$$
3. Ecrire l'équation à laquelle obéit r. On suppose que r est constant (jusqu'à la fin du problème), on montrera alors que cette équation, à l'ordre dominant (on négligeant les termes $o(a/r)^2$ que $\dot{\theta}$ reste constant et égal à ω (que l'on calculera).
4. Vérifiez que $\dot{\theta} = \omega$ avec r constant est bien solution de l'équation d'Euler-Lagrange obtenue avec la variable θ, à l'ordre $o(a/r)^2$.
5. Montrer que l'équation décrivant la dynamique de la variable ϕ est
$$\ddot{\phi} + \beta \sin 2(\phi - \theta) = 0,$$
où l'on reliera β avec ω.
6. Montrer que l'haltère dont la tige pointe vers la terre, et dont le centre de masse évolue avec une vitesse angulaire ω est bien solution de la précédente équation (pouvez vous alors expliquer pourquoi on parle de face cachée de la lune ?).
7. Calculer la fréquence d'oscillation de l'haltère autour de cette position d'équilibre.

2 Cylindre à masse décentrée



On considère un cylindre rigide de masse nulle et de rayon R sur lequel est fixée une masse m, ponctuelle, localisée à une distance r de l'axe de symétrie dudit cylindre. Ce dernier se déplace sans frottement (en roulant) sur une surface inclinée d'un angle α par rapport à la direction du vecteur d'accélération gravitationnelle. La grandeur θ mesure l'angle de la rotation du cylindre, lors d'un déplacement depuis l'origine des axes : i.e. si $\theta = 2\pi$, le cylindre a roulé sur une distante égale à $2\pi R$. On note (x, y) les coordonnées du centre de masse dans le repère relié au plan incliné.

1. Donner l'expression (x, y) en fonction de θ, r et R.
2. Calculer l'énergie cinétique stockée par la masse m.
3. Montrer que l'énergie potentielle est égale à

$$E_p = mg\left(R\cos\alpha - r\cos(\theta + \alpha) - \theta R\sin\alpha\right) + C$$

   On décrira la physique décrite par cette énergie lorsque $r = 0$ et lorsque $\alpha = 0$.
4. Trouver l'équation qui prédit la dynamique de la variable θ.
   Pour quelle valeur de θ se trouve le système à l'équilibre ?
   Pour quelles valeurs de α, le cylindre ne peut pas s'arrêter de tourner ?
5. On considère que $\alpha \sim \theta$, et que $\theta \ll 1$, montrer que l'on a :

$$\beta\ddot{\theta} + \omega^2(\theta - \theta_0) = 0.$$

   On n'oubliera pas de définir les paramètres β , ω et θ_0.

Université de Nice	**2013-2014**
Licence L3	

Systèmes dynamiques
Partiel du 7 novembre 2013

Un problème à 2 corps

On considère deux sphères de masse m_1 et m_2 suffisamment petites pour les décrire comme des masses ponctuelles.
La masse 1, posée sur un plan horizontal, est attachée par une corde (de masse négligeable) inextensible qui passe par un trou du plan situé en $(x = 0, y = 0)$. De l'autre côté de ce support est attaché la masse 2 avec l'autre extrémité de la corde. On supposera que cette masse ne peut se déplacer que dans la direction verticale.

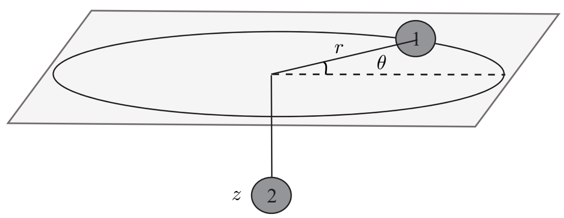


FIGURE 1 – Un plan, deux masses et une corde...

1. Soit l la longueur de la corde entre les deux masses. Trouver les coordonnées des deux masses en fonction de r et de θ.
2. Calculer l'énergie cinétique du système.
3. Calculer l'énergie potentielle du système.
4. Ecrire les équations du mouvements à partir du Lagrangien de ce système.
5. Ecrire l'énergie du système. Pourquoi est-elle conservée ?
6. Montrer qu'il existe une autre quantité conservée. Que représente-t-elle physiquement ?
7. En utilisant la deuxième quantité conservée, montrer que l'équation à laquelle obéit la coordonnée r peut s'écrire sous la forme :
$$\ddot{r} = -\alpha + \frac{\beta}{r^3} \tag{1}$$
et expliciter les coefficients α et β en fonction des paramètres physiques.
8. Ecrire l'énergie en fonction de la coordonnée r uniquement. Dessiner le graphe de l'énergie potentielle effective en fonction de r.
Discuter le type de mouvements possibles en fonction de l'énergie initiale du système.
9. Ecrire l'équation qui relie $\dot{r}^2$ et r. Dessiner le portrait de phase du système ($\dot{r}$ en fonction de r).
10. Ecrire (sans la calculer explicitement) une intégrale définie qui permettrait de d'obtenir l'équation des trajectoires possibles de la masse m_1 en coordonnées polaires.
11. Décrire complètement le cas où la trajectoire de la masse m_1 est circulaire.
12. Conclure par une description qualitative de la dynamique de ce système à 2 corps, dans les coordonnées r et θ et z. Comparer les cas où le moment angulaire initial est nul ou est non nul.

Université de Nice
Licence – L3

le 5 novembre 2015

Systèmes Dynamiques

Partiel

1 – Calculs de la composante J_z du moment angulaire

Soit une particule ponctuelle de masse m et de coordonnées cartésiennes (x, y, z).

a. Ecrire la composante J_z du moment angulaire de cette particule en coordonnées cartésiennes, calculé par rapport à l'origine des coordonnées.

b. Ecrire les relations qui établissent la correspondance entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques (r, θ, z). En déduire J_z en coordonnées cylindriques.

c. Ecrire l'énergie cinétique E_{cin} de la particule en coordonnées cylindriques. Comment peut-on déduire de cette expression de E_{cin}, celle de J_z en coordonnées cylindriques ?

2 – Pendule composé

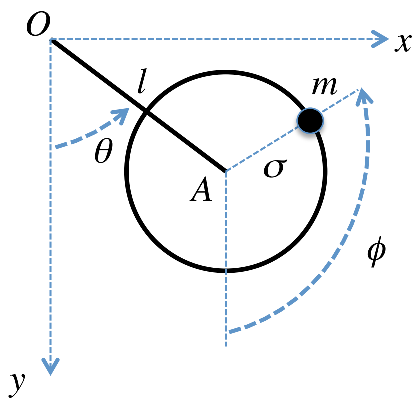


FIGURE 1 –

On considère un système dynamique constitué d'une masse m attachée sur une roue de rayon σ qui peut tourner autour de son axe A. Cet axe de la roue est relié à une tige de longueur l qui peut elle-même tourner autour du point 0 fixé (voir Figure 1). On s'intéresse aux mouvements de m en négligeant les masses de la roue et de la tige.
On considère un système d'axes comme indiqué sur la figure, où les angles θ et ϕ sont mesurés à partir de l'axe y qui pointe vers le bas.

a. Trouver les coordonnées de la masse m en fonction de θ et ϕ.

b. Calculer l'énergie cinétique.

c. En calculant l'énergie potentielle de l'ensemble, en déduire le Lagrangien.

d. Ecrire les équations du mouvement.

e. Quelles sont les quantités conservées dans ce système dynamique (justifier) ?

A partir de maintenant, on considère le système ci-dessus mais *forcé*, en imposant une rotation de la roue à vitesse constante : $\phi(t) = \Omega t$.

f. Ecrire l'équation différentielle qui décrit l'évolution de θ dans le système forcé où $\phi(t) = \Omega t$.

g. Dans ce nouveau système quelles sont les quantités conservées (justifier) ?

h. Discutez le cas limite où $l \ll \sigma$. Que retrouve-t-on ?

i. Quelle est l'interprétation physique du cas limite où $g \ll l\Omega^2$? Dans ce dernier cas, peut-on avoir une solution stationnaire où $\ddot{\theta} = 0$?

3 – Masse réduite

L'énergie cinétique de deux particules de masse m_1 et m_2, et de vecteurs positions respectifs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, s'écrit :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 \tag{1}$$

a. Rappeler l'expression du vecteur position du barycentre $\vec{R}$ en fonction de $\vec{r}_1, \vec{r}_2, m_1, m_2$.

b. En considérant le vecteur "déplacement relatif" défini par $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, montrer comment on peut exprimer l'énergie cinétique E_{cin} dans les variables $\vec{R}$ et $\vec{r}$.

c. Au vu du calcul effectué, à quoi correspond la notion de "masse réduite" d'un système de deux particules ? Pour quel type de potentiel $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ cette notion joue-t-elle un rôle intéressant ?

Université de Nice | le 14 décembre 2015
Licence – L3

Systèmes Dynamiques

Examen final

1 – Modèle simplifié de Haken d'un laser à 2 modes

Le modèle du laser à une variable a été généralisé par Haken au cas du *laser à 2 modes*. Celui-ci produit 2 types de photons dont les populations sont décrites par les variables n_1 et n_2. Haken obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= G_1(N_0 - n_1 - n_2)n_1 - n_1 \\ \dot{n}_1 &= G_2(N_0 - n_1 - n_2)n_2 - n_2 \end{aligned}$$

où $(N_0 - n_1 - n_2)$ représente le nombre d'atomes excités (i.e. l'inversion de population) dans le laser. Les paramètres du modèle retenus ici (Haken en considère davantage) sont les gains G_1, G_2, associés respectivement aux deux types de photons, ainsi que le nombre maximum d'atomes excités N_0 (qui dépend du paramètre de pompe du laser).
On supposera dans la suite que $G_1 > G_2$.

a. Calculer la matrice jacobienne de ce système en fonction des variables et des paramètres.

b. Discuter la stabilité de l'état stationnaire $\underline{n}^{(0)} = (0, 0)$. Synthétiser vos conclusions en indiquant les types d'états stationnaires obtenus dans un tableau comme ci-dessous :

	$N_0 < 1/G_1$	$N_0 > 1/G_1$
$N_0 < 1/G_2$		
$N_0 > 1/G_2$		

c. Montrer qu'il existe deux autres états stationnaires $\underline{n}^{(1)} = (n_1^*, 0)$, avec $n_1^* \neq 0$, et $\underline{n}^{(2)} = (0, n_2^*)$, avec $n_2^* \neq 0$. Exprimer n_1^* et n_2^* en fonction des paramètres du modèle, et préciser dans quelles conditions ces états sont physiquement acceptables.

d. Calculer les matrices jacobiennes évaluées en $\underline{n}^{(1)}$ et en $\underline{n}^{(2)}$, et montrer que l'on peut écrire celles-ci sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{pmatrix} -G_1 n_1^* & -G_1 n_1^* \\ 0 & \frac{G_2}{G_1} - 1 \end{pmatrix} \\ J_2 &= \begin{pmatrix} \frac{G_1}{G_2} - 1 & 0 \\ -G_2 n_2^* & -G_2 n_2^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Discuter la stabilité linéaire de $\underline{n}^{(1)}$ et de $\underline{n}^{(2)}$. (On rappelle l'hypothèse $G_1 > G_2$) .

e. Représenter le portrait de phase global du système dans l'espace des phases (n_1, n_1) lorsque les deux états stationnaires $\underline{n}^{(1)}$ et $\underline{n}^{(2)}$ existent. Décrire qualitativement l'évolution du laser lorsque l'on part d'une condition initiale proche de $(0, 0)$.

f. Dessiner le diagramme complet de bifurcation des états stationnaires possibles pour la variable n_1 en fonction du paramètre N_0.