Systèmes dynamiques (L3) **2018-2019**

Analyse de stabilité linéaire d'un système dissipatif

1 Exemple : Instabilité liée au LASER

(Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

Sous certaines hypothèses, la dynamique d'un laser peut être décrite par le système non linéaire suivant :

$$\frac{du}{dt} = -ku + Guv \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -fv + P - Guv \tag{2}$$

où les variables (u, v) sont respectivement le nombre de photons et le nombre d'atomes excités dans la cavité optique du laser. Ces variables sont donc à valeur réelles positives ou nulles. Les paramètres du système sont les suivants : G est le paramètre de gain lié à l'émission stimulée, f le taux d'émission spontanée, k le coefficient de perte de la cavité et P le paramètre de pompe permettant d'exciter les atomes.
Pour réduire le nombre de paramètres on travaille avec un temps adimensionné. Montrez que celui-ci peut être choisi de sorte que les équations s'écrivent :

$$\dot{u} = -u + buv \tag{3}$$

$$\dot{v} = -\epsilon v + a - buv \tag{4}$$

Précisez les nouveaux paramètres a, b, ϵ.

1. Calculez les états stationnaires possibles de ce système en fonction des paramètres a, b, ϵ. Dans le cas où il y a deux états stationnaires on notera ceux-ci (u_0, v_0) et (u_1, v_1).
2. Ecrivez la matrice jacobienne $J(u, v)$ du système en fonction des variables u, v.
3. Calculez la matrice jacobienne $J_0 = J(u_0, v_0)$ en fonction des paramètres a, b, ϵ.
4. Discutez la stabilité de l'état stationnaire (u_0, v_0) en fonction des paramètres a, b, ϵ.
5. Calculez la matrice jacobienne $J_1 = J(u_1, v_1)$ en fonction des paramètres.
6. Discutez la stabilité de l'état stationnaire (u_1, v_1) en fonction des paramètres.
7. Ecrivez l'équation caractéristique relative aux valeurs propres de J_1 et déduisez-en la condition sous laquelle l'état stationnaire (u_1, v_1) est un foyer stable.
8. Précisez le domaine des valeurs du produit ab tel que le (u_1, v_1) soit un foyer stable.
9. Dans le cas du foyer stable, représentez schématiquement le portrait de phase dans les variables (u_1, v_1), ainsi que l'évolution temporelle de $u(t)$.