Systèmes dynamiques (L3) **2018-2019**

Bifurcations noeud-col et fourche

1 Bifurcation noeud-col - perte d'équilibre dans le pendule forcé

1. Etablir que l'équation différentielle décrivant la dynamique du pendule représenté sur la figure ci-dessus s'écrit : $I\frac{d^2\Theta}{dt^2} = Mgr - mgl\sin(\Theta) - \gamma l^2 \frac{d\Theta}{dt}$.
   Retrouver l'expression de l'équation adimensionnée qui peut en être déduite avec deux nombres sans dimension (ν, Γ) qui lui sont associés. $\nu = \frac{\gamma l^2}{\sqrt{mglI}}$, $\Gamma = \frac{Mr}{ml}$.
2. Rappeler comment les états stationnaires de l'équation adimensionée peut être résolue graphiquement. En déduire que ce système possède un point de bifurcation noeud-col pour une valuer critique Γ_c. Ce point correspond à un équilibre critique Θ_c^*.
3. Effectuer un changement de variable dans le voisinage de l'équilivre correspondant au pendule forcé par le moment de force (couple) critique Γ_c. Montrer que le système dynamique peut s'écrire sous la forme normale d'une bifurcation noeud-col :

   $$\ddot{\Psi} + \nu\dot{\Psi} = \epsilon + \Psi^2$$

   où $\epsilon = (\Gamma - \Gamma_c)/2$ et $\Psi = (\Theta - \Theta_c^*)/2$
4. On veut étudier le comportement du pendule autour de son équilibre stable, $\Psi = \Psi_s + \eta$, dans la limite où $|\epsilon| \ll 1$. Montrer que l'on obtient l'équation linéaire : $\ddot{\eta} + \nu\dot{\eta} + 2\sqrt{|\epsilon|}\eta = 0$.
5. Montrer que lorsque $|\epsilon|$ est assez petit le retour à l'équilibre stable se fait exponentiellement avec un temps caractéristique proportionnel à $|\epsilon|^{-\frac{1}{2}}$.
6. (*) Discuter comment la situation change par rapport au point précédent, en l'absence de frottement viqueux, $\nu = 0$.

2 Bifurcation fourche et brisure de symétrie - une bille attachée par un ressort sur un rail incliné

On considère une bille de masse m pouvant coulisser sur un rail incliné avec un angle θ (voir figure **??**). La bille est soumise à un frottement visqueux, avec la constant de viscosité γ. La bille est également attachée par dessous du rail à un ressort de constante k et de longueur au repos l_0. L'autre extrémité du ressort est fixée sur un ressort de sorte que la longueur du ressort soit égale à l_1 lorsque celui-ci est perpendiculaire au

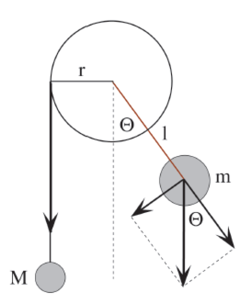

Figure 1 – Pendule forcé

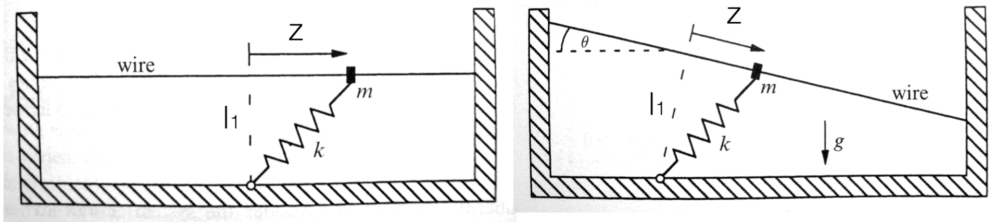

FIGURE 2 – une bille attachée par un ressort sur un rail incliné

rail. Cette dernière position sera comptée comme l'origine $z = 0$ de la position de la masse m sur le rail. Suivant que le rapport $R = \frac{l_0}{l_1}$ soit plus petit ou plus grand que 1, la position $z = 0$ correspondra à un ressort étiré ou comprimé (*cf.* exercice 4 de la feuille 3).

1. Faites un schéma du système et montrez que l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit comme l'équation différentielle suivant :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\frac{dz}{dt} = mg\sin(\theta) - k\left(\sqrt{l_1^2 + z^2} - l_0\right)\frac{z}{\sqrt{l_1^2 + z^2}}$$

2. Pour adimensionner l'équation, on considère la variable $u = z/a$ et les paramètres sans dimensions $R = l_0/l_1$, $b = mg\sin(\theta)/kl_1$ et $\nu = \tau_i/\tau_v$, où $\tau_i\sqrt{m/k}$ et $\tau_v = \gamma/k$. On suppose que le frottement visqueux est assez important ($\nu \gg 1$). On considère des déplacements de la bille tels que $z \ll l_1$. Avec ces hypothèses, montrer qu'on peut choisir a pour simplifier l'équation du système dynamique sous la forme :

$$\dot{u} = b + (R-1)\,u - \frac{R}{2}u^3$$

où $\dot{u}$ est la dérivée de u par rapport au temps adimensionné t/τ_v. Indication : $(1+u^2)^{-1/2} \sim 1 - \frac{u^2}{2} + ...$

3. Trouver un changement de variable $u = qx$ (déterminer q) permettant de simplifier davantage l'équation précédente afin de la mettre sous la forme normale de la bifurcation fourche imparfaite :

$$\dot{x} = h + r\,x - x^3 \tag{1}$$

4. Que devient l'équation (**??**) dans le cas du rail horizontal ? Représentez les solutions stationnaires du système dans un diagramme de bifurcation et explicitez l'interpretation physique. Effectuez une étude de stabilité linéaire des équilibres obtenus.

5. Comment se déplacent les états stationnaires du système lorsqu'on incline légèrement le rail ? En utilisant l'équation (**??**) montrez qu'il existe une valeur critique $h_c(r) > 0$ telle que des positions d'équilibre disparaissent lorsque $h > h_c(r)$. De quel type de bifurcation s'agit-il ? Déterminez une expression analytique (en fonction de tous les paramètres du système) de l'angle d'inclination critique θ_c au-delà la bille ne peut plus posséder une position d'équilibre avec $z < 0$.

6. Tracez un diagramme de phase dans l'espace des paramètres (r, h) qui indique les régions de cet espace où il existe respectivement 1, 2, ou 3 position d'équilibre de la bille sur le rail. Représentez ensuite un diagramme de bifurcation des solution stationnaires en fonction de h avec $r > 0$ fixé, puis un diagramme de bifurcation en fonction de r, avec $h > 0$ fixé. Utilisez le premier pour décrire comment il est possible d'observer un phénomène d'hystérèse dans ce système dynamique.