Travaux dirigés – Outils Numériques

Feuille numéro 4

Manuel en ligne de *Python* : `https://docs.python.org/fr/3.5/tutorial/`

1 Intégration numérique

L'intégrale définie $Y = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$ peut s'approcher numériquement par $Y = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\Delta x$, ou x_i est un élement de la discrétisation de l'intervalle $[a, b]$, soit $x_i = i \times \Delta x + a$ avec $\Delta x = (b - a)/N$ (méthode de Newton-Cotes). En utilisant plusieurs valeurs de N (ex. $N = 10$, 100 et 1000), trouver numériquement les intégrales

1. $\int_0^1 \exp(x) dx$
2. $\int_0^1 \sin(x) dx$
3. $\int_0^1 \sin(x) \exp(x) dx$

et comparer avec la solution analytique. En utilisant la même méthode, construire un vecteur $Y(x_i)$ et tracer les courbes correspondant à:

1. $Y(x) = \int_0^x \exp(t) dt$
2. $Y(x) = \int_0^x \sin(t) dt$
3. $Y(x) = \int_0^x \sin(t) \exp(t) dt$

2 Résolution d'équations différentielles

2.1 Exemple d'une équation d'ordre 1

On considère une fonction $y(t)$ qui obéit à l'équation différentielle suivante

$$\frac{dy}{dt} + \alpha\, y = 0$$

avec α une constante réelle (on prendra $\alpha = 2$) et la condition initiale $y(0) = 3$.

1. Programmer la méthode d'Euler pour résoudre cette équation différentielle dans l'intervalle $t \in [a, b]$ avec $a = 0$ et $b = 4$. On choisira un nombre $N = 100$ de points dans l'intervalle.
2. Tracer la courbe obtenue de y en fonction de t
3. Sur le même graphe, tracer la solution analytique $y_a(t)$ et comparer les courbes
4. Quelle est la précision de la méthode d'Euler (on définit la précision comme l'écart $|y - y_a|$ calculé sur le dernier point de l'intervalle). Que devient cette précision si l'on prend $N = 1000$ points ? 10 000 points ?

2.2 Systèmes d'équations différentielles

On veut trouver la solution d'un système d'équations différentielles ordinaires de premier ordre de la forme:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{1}$$

dans laquelle $\mathbf{x}$ est un vecteur et $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ une fonction vectorielle. On cherche à résoudre l'équation différentielle pour trouver $\mathbf{x}(t)$. On peut montrer que tout système d'équations ordinaires, même d'ordre supérieur à 1, peut s'exprimer comme indiqué par l'Éq. (1).

2.2.1 Modèles mathématiques pour la propagation de maladies

A. Modèle SI Le modèle plus simple pour décrire la propagation d'une maladie est le modele SI, où S est le nombre de personnes susceptibles de devenir malade et I le nombre de personnes infectées

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S\, I \tag{2}$$
$$\frac{dI}{dt} = \alpha S\, I \tag{3}$$

avec α une constante. On pose $S + I = N$, avec N le nombre d'individus dans la population, qui est constant. Dans ce cas le système d'eqs (2-3) peut se ramener aux cas d'une équation différentielle simple ($\dot{S} = f(S)$) de l'exercice 2.1.

Résoudre l'équation différentielle en utilisant la méthode d'Euler, et tracer S et I en fonction de t. Suggestion pour les paramètres du modèle : $\Delta t = 0.001$, $\alpha = 1/1000$, $N = 1000$ (et intégrer sur 15000 pas). On prendra la condition initiale $S(0) = N - 1$.

B. Modèle SIR Le Covid-19 (comme des autres maladies similaires) suit une dynamique légèrement plus complexe car les individus infectés peuvent passer à un état où ils ne vont plus transmettre la maladie; cet état est lié soit à la mort de l'individu soit à la guérison et l'immunité à la maladie qui en découle. La dynamique pour ce type de maladie est donnée par:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S\, I \tag{4}$$
$$\frac{dI}{dt} = \alpha S\, I - \beta I \tag{5}$$
$$\frac{dR}{dt} = \beta I \tag{6}$$

Cette fois le système ne se réduit pas à une seule équation différentielle comme dans le modèle SI. En utilisant la méthode d'Euler, trouver $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$. Tracer les solutions en fonction du temps. Suggestion pour les paramètres du modèle SIR : $\Delta t = 0.001$, $\alpha = 1/100$, $N = 1000$, $\beta = 1$ (et intégrer sur 5500 pas).

2.2.2 Modèle simple de physique: l'oscillateur harmonique

Une équation différentielle d'ordre supérieur peut s'exprimer comme un système d'équations d'ordre 1. Ainsi l'équation de l'oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ peut se mettre sous cette forme en introduisant une fonction auxiliaire y, qui est la vitesse. Il vient :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

qui peut s'écrire sous forme vectorielle $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = F(\mathbf{X}, t)$ avec $\mathbf{X} = (x, y)$. On obtient le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Résoudre les équations de l'oscillateur harmonique avec $\omega_0 = 1$ à l'aide de la méthode Euler en utilisant $\Delta t = 10^{-4}$. On prendra les conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 0$. Dessiner x et y en fonction du temps, ainsi que le *portrait de phase* (courbe montrant la position x en abcisse et la vitesse $\dot{x}(t)$ en ordonnée).

Faites de même pour $\Delta t = 0.1$. Que se passe-t-il (en particulier sur le portrait de phase) ?