Travaux dirigés – Outils Numériques

Feuille numéro 3

Manuel en ligne de *Python* : `https://docs.python.org/fr/3.5/tutorial/`

1 Méthode de la bissection (ou *dichotomie*) pour trouver la racine d'une fonction non-linéaire

On cherche la racine de

$$y(x) = x^6 - 7x - 17$$

dans l'intervalle $x \in [0, 2]$. On utilise la méthode de la bissection. La procédure est la suivante:

1. Définir la fonction $y(x)$, puis tracer son graphe dans l'intervalle $x \in [0, 2]$ avec plt.plot(x,y). Vérifier que $y(0) < 0$ et $y(2) > 0$ et qu'il y a une seule racine dans l'intervalle $[0, 2]$
2. Définir les valeurs initiales : $x_{neg} = 0$, $x_{pos} = 2$ et $x_{test} = \frac{x_{neg}+x_{pos}}{2}$. Afficher x_{test} et évaluer la valeur de $y(x_{test})$: si $y(x_{test}) < 0$, faire $x_{neg} = x_{test}$, sinon $x_{pos} = x_{test}$. Répéter cette procédure jusqu'à ce que $x_{pos} - x_{neg} < \epsilon$, avec la "tolérance" $\epsilon = 0.001$ *[La méthode est une boucle "while" avec un "if" à l'intérieur].*
3. Sur le graphe de la fonction $y(x)$, tracer les lignes verticales correspondant aux positions successives de x_{neg} et x_{pos} sur l'axe des abcisses (utiliser des couleurs différentes pour x_{neg} et x_{pos}).

2 Méthode de Newton pour trouver la racine d'une fonction non-linéaire

On cherche à nouveau la racine de $y(x) = x^6 - 7x - 17$ en utilisant cette fois la méthode de Newton :

1. Définir la fonction $y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$.
2. Choisir $x_0 = 2$
3. Dans la méthode de Newton on calcule une suite x_1, x_2, x_3, ... qui converge vers la racine de la fonction. Le passage de x_{n-1} à x_n se fait de la manière suivante

   $$x_n = x_{n-1} - \frac{y(x_{n-1})}{y'(x_{n-1})}$$

   Calculer et affichez x_1 et $y(x_1)$.
4. Programmer le calcul de x_n ci-dessus pour $n = 1, 2, 3....$ On continue les itérations tant que $|y(x_n)| > \epsilon$, avec $\epsilon = 0.01$ *[La procédure implique à nouveau une boucle "while" (ou "for")].*
5. Sur le graphe de $y(x)$, tracer des lignes verticales correspondant aux valeurs de x_n.
6. Répéter la procédure mais en partant de la valeur initiale $x_0 = 0.5$. Est-ce que la racine trouvée est la même ?

3 Méthode de la bissection pour résoudre une équation trascendante

On cherche la solution de l'équation

$$x = \cos(x)$$

dans l'intervalle $x \in [0, 2]$. On utilise la procédure suivante:

1. Tracer $y_1(x) = x$ et $y_2(x) = \cos(x)$ dans l'intervalle $x \in [0, 2]$, placer une légende pour différencier les courbes. Sur le graphe, donner une estimation visuelle de l'intersection $y_1(x) = y_2(x)$.

2. Définir la fonction $h(x) = x - \cos(x)$ et tracer son graphe sur une nouvelle figure. Vérifier que (i) pour $x \in [0, 2]$ il n'y a qu'une seule racine, (ii) $h(0) < 0$ et (iii) $h(2) > 0$.

3. Utiliser la méthode de la bissection pour trouver la racine x^* telle que $y_1(x^*) = y_2(x^*)$ (on choisira à nouveau, $\epsilon = 0.001$).

4. Sur le graphe de $y_1(x)$ et $y_2(x)$ tracer les lignes verticales correspondant aux intervalles $[x_{neg}, x_{pos}]$.

4 Trouver des racines avec *fsolve* et *roots*

Les fonctions "fsolve" et "roots" de Python permettent de trouver automatiquement les racines. On s'intéresse ici à la fonction

$$y(x) = x^2 - 1$$

.

4.1 Utilisation de fsolve

Pour utiliser fsolve, il faut importer une librairie : `from scipy.optimize import fsolve`. Pour trouver une racine d'une fonction `myFunc`, la commande est `fsolve(myFunc, x0)` avec `x0` le point de départ des itérations (sur le même principe que la méthode de Newton)

1. Definir $y(x)$ comme une fonction (par exemple myFunc).

2. Chercher les racines de la fonction $y(x)$ en prenant $x_0 = -0.1$. Comparer avec la "vraie" racine.

4.2 Utilisation de roots

La fonction `roots` fait partie de la librairie `numpy`. Contrairement à fsolve, elle ne fonctionne que pour des polynômes. Un polynôme s'écrit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, x^k$. La commande roots fonctionne de la manière suivante : `np.roots(C)` avec `C` un vecteur qui contient les coefficients c_k du polynôme *dans l'ordre des puissances décroissantes.* Ainsi le vecteur `C` associé à la fonction $y(x) = x^2 - 1$ est $[1, 0, -1]$.

1. Déterminer la racine de la fonction $y(x)$ et comparer avec ce que vous avez trouvé avec fsolve.

2. Utiliser roots pour trouver les racines de $y(x) = 3x^3 + 2x^2 - 10x - 20$. Chercher également les maxima et minima locaux de $y(x)$.

5 Résolution d'un système d'équations avec fsolve

On cherche une solution du système:

$$\begin{aligned} 2x - y &= e^{-x} \\ -x + 2y &= e^{-y} \end{aligned}$$

1. Définir la fonction

$$F(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2x - y - e^{-x} \\ -x + 2y - e^{-y} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{X} = [x, y]$.

2. Cherche avec fsolve la solution de $F(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ (attention : cette fois le point de départ $\mathbf{X_0}$ est un vecteur).