Mécanique 3	2019-2020

Integration des équations du mouvement et oscillations de petite amplitude

1 Portrait de phase du pendule

On considère un pendule planaire de masse m, de longueur l, soumis à l'accélération de la gravité g.

1. Ecrire le Langrangien.
2. En déduire une grandeur conservée E.
3. Trouver la relation qui relie la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ à l'angle du pendule θ.
4. Dessiner le portrait de phase : $\dot{\theta}$ en fonction de θ.

2 Equations du mouvement pour une particule dans un champ central [optionnel]

On considère une particule (localisée dans un plan, à une distance r du centre, avec un angle θ) soumise à une force centrale $-\alpha\hat{r}/r^2$.

1. Montrer que le moment angulaire est conservé.
2. A partir de la conservation de l'énergie et du moment angulaire, trouver une expression pour déterminer entre quelles valeurs de r le mouvement est confiné (i.e. deriver le potentiel effectif).
3. Trouver des expressions pour décrire les trajectoires (en coordonnés polaires) comme $\theta(r)$ (ou $r(\theta)$) [vérifier que $r_0/r = 1 + e\cos(\theta)$ avec r_0 et e constants]

3 Problème de Kepler [optionnel]

On considère un champ d'attraction central décrit par un potentiel $U = -\alpha/r$ qui impose une force sur une particule de masse m. En sachant qu'on peut exprimer $r_0/r = 1 + e\cos(\theta)$ avec r_0 et e constants, determiner les trajectoires qui emergents pour $e = 0$, $e < 1$, $e = 1$, et $e > 1$.

4 "Gravité" sûr la table

On considère deux sphère de masse m_1 et m_2 suffisamment petites pour les décrire comme des masses ponctuelles. La masse 1, posée sur un plan horizontal, est attachée par une corde (de masse négligeable) inextensible qui passe qui passe par un trou du plan situé en ($x = 0$, $y = 0$). De l'autre côté de ce support est attaché la masse 2 avec l'autre extrémité de la corde. On supposera que cette masse ne peut se déplacer que dans la direction verticale.

1. Soit ℓ la longueur de la corde entre les deux masses. Trouver les coordonnées des deux masses en fonction de r et de θ.
2. Calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.
3. Ecrire les équation du mouvement à partir du Lagrangien de ce système.
4. Utiliser la conservation du moment angulaire pour arriver à une équation : $\ddot{r} = -\alpha + \frac{\beta}{r^3}$.
5. Trouver quand la trajectoire de la masse m_1 est circulaire.

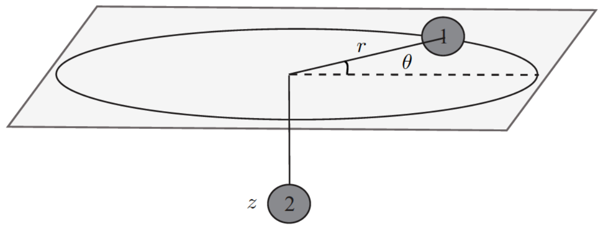


FIGURE 1 – Fig. pour **“Gravité” sûr la table**.

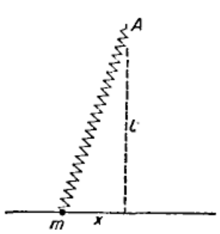
FIGURE 2 – Fig. pour **Une bille dans un entonnoir hyperbolique**. Un enfant lance une bille dans un entonnoir hyperbolique, voir figure à droite ($x, y, z = \frac{-k_0}{\sqrt{x^2+y^2}}$).

5 Une bille dans un entonnoir hyperbolique

On lance une particule (de masse $m = 1$) sur la paroi interne d'un entonnoir hyperbolique ($x, y, z = \frac{-k_0}{\sqrt{x^2+y^2}}$) comme indiqué dans la figure (avec k_0 une constante). On imagine que la particule reste toujours collée à la surface et qu'il n'y a pas de frottement entre la particule et la paroi. La particule subit la force de gravité.

1. Exprimer la position de la particule en utilisant 2 variables indépendantes.
2. Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.
3. Ecrire les équations de mouvement à partir du Lagrangien.
4. Déterminer les quantités conservées.
5. Trouver une expression pour déterminer les valeurs maximum et minimum de z [Suggestion : définir une énergie potentielle effective.].

6 Oscillations de petites amplitude – le ressort



On considère un objet de masse m qui se déplace sur une droite. Cette masse est relié avec un ressort de constante de raideur k et une longueur au repos ℓ_0, à un point fixé, éloigné d'une distance L de la droite. Calculer la fréquence des oscillations pour de petites amplitudes.

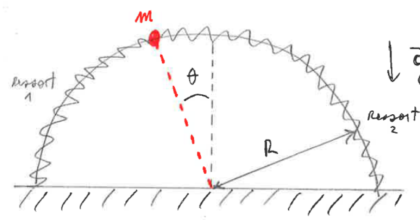


FIGURE 3 – Fig. pour **Dynamique d'une particule dans un demi-cercl**.

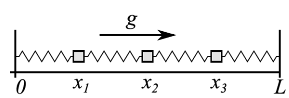


FIGURE 4 – Fig. pour **Dynamique d'oscillators couplés**.

7 Dynamique d'une particule dans un demi-cercle [optionnel]

Une bille perforée de masse m glisse sur un fil de fer en forme de demi-cercle de rayon R, voir illustration. La masse subit la force de pesanteur et les forces du ressort 1 à gauche et du ressort 2 à droite, les deux ayant une constante de raideur k (et une longueur au repos nulle ($\ell_0 = 0$), comme indiqué sur le dessin). Les ressorts sont contraints à se déplacer le long du fil de fer.

1. En imaginant que la masse glisse sans frottement sur le fil de fer, trouver une expression pour l'énergie cinétique T et potentielle V de la masse m, et écrire le Lagrangien L du système.
2. Déduire les équation de mouvement de la masse m.
3. Determiner quand $\theta = 0$ est un point d'équilibre stable et determiner la fréquence d'oscillations.

8 Dynamique d'oscillators couplés

On considère 3 masses m et 4 ressorts de constante de raideur k, de longueur à l'équilibre ℓ. Attention : ces masses ne peuvent se déplacer que verticalement, i.e. tangentiellement à l'accélération gravitationnelle g.

1. Calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.
2. Ecrire les équation du mouvement à partir du Lagrangien de ce système.
3. Trouver les points d'équilibre et trouve les fréquences et les modes d'oscillation de l'ensemble.