Mécanique 3 **2019-2020**

Principe variationnel appliqué à la mécanique :
derivation des équations du mouvement avec Euler-Lagrange

1 Un peu de mathématique avant commencer :

1.1 Variété et space tangente

On fait rappel aux concepts de variété et space tangente. Considerer comme variété un cercle de rayon $R = 1$ et trouver l'space tangente.
Variété

1.2 De coordonnées cartésiennes à cylindriques – Expression pour la énergie cinétique

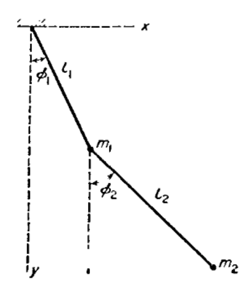
On fait un petit exercice mathématique pour apprendre comment on peut écrire l'énergie cinétique si on decide faire un changement de coordonnées. Les coordonnées cylindrique sont données par

$$\vec{r}(\rho, \phi, z) = (x(\rho, \phi, z), y(\rho, \phi, z), z(\rho, \phi, z)) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$$

1. Dessiner les courbes associées à (ρ, ϕ, z) (on varie une variables en gardant les autres constantes).
2. Calculer la base locale
$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} / || \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} || \quad (\alpha \in (\rho, \phi, z))$$
3. Exprimer $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ et l'énergie cinétique T en fonction de $\rho, \phi, z,\ \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z}$ et de la base locale $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$.

2 Double pendule coplanaire

On considère un pendule coplanaire défini comme suit : Une masse m_1 est attachée par une tige (sans masse) de longueur l_1. Sur cette masse m_1 est attaché une autre tige de longueur l_2 de masse négligeable qui possède en son extrémité une masse pesante m_2. L'ensemble est soumis à la force d'attraction terrestre.



1. Trouver les coordonnées des masses m_1 et m_2 en fonction de l_1, l_2, ϕ_1, ϕ_2.
2. Calculer l'énergie cinétique
3. En calculant l'énergie potentielle de l'ensemble en déduire le Lagrangien.
4. Ecrire les équations du mouvement.

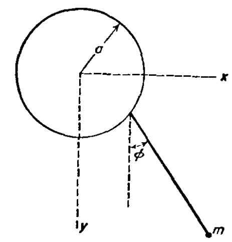
3 Pendule sur un chariot

On considère un pendule de masse m_2 attaché par une tige de longueur l à une masse m_1 libre de se mouvoir dans la direction x.

1. Trouver les coordonnées de la masse m_1 et m_2 en fonction de l, x, ϕ.
2. Calculer l'énergie cinétique
3. En calculant l'énergie potentielle de l'ensemble en déduire le Lagrangien.
4. Ecrire les équations du mouvement.

4 Pendule forcé

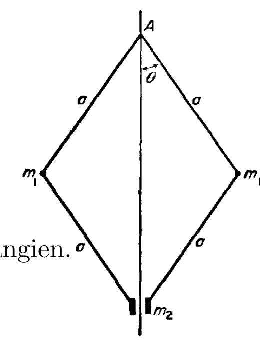
On considère un pendule constitué d'une masse m relié à une tige de longueur L. Cette tige, de masse négligeable est fixée sur un mobile qui se déplace à une vitesse constante sur un cercle de rayon σ



1. Trouver les coordonnées de la masse m en fonction de ϕ.
2. Calculer l'énergie cinétique
3. En calculant l'énergie potentielle de l'ensemble en déduire le Lagrangien.
4. Ecrire les équations du mouvement.

5 Volant d'inertie

Une masse m_2 se déplace le long d'un axe. Le mouvement de cette masse induit un déplacement de deux tiges de longueur σ au bout desquelles se trouvent deux masses m_1. Ces masses sont elles-mêmes reliées à l'origine grace à deux autres tiges de même longueur. On fait tourner l'ensemble autour de son axe avec une vitesse angulaire Ω



1. Trouver les coordonnées des masses $m1$ et $m_2$en fonction de θ.
2. Calculer l'énergie cinétique
3. En calculant l'énergie potentielle de l'ensemble en déduire le Lagrangien.
4. Ecrire les équations du mouvement.

6 L'identité de Beltrami

Cette identité fut découverte en 1868 par Beltrami. Nous considérons le Lagrangien suivant :

$$L = f(x(t), x'(t))$$

qui ne dépend du temps qu'au travers de la variable $x(t)$ et de sa dérivée $x'(t)$.

1. Ecrire l'équation de Euler-Lagrange pour ce lagrangien.
2. Ecrire la relation qui traduit le fait que L est indépendant du temps
3. Avec ces deux relations, montrer que l'on a

$$\frac{d}{dt}\left(f - x'\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0$$