Mécanique 3	2019-2020

Principes variationnels (le concept) : Le temps de parcours

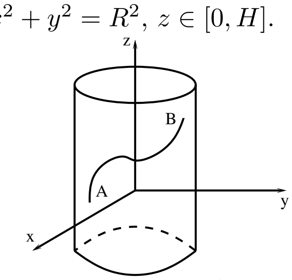
1 Un peu de mathématique avant commencer :

1.1 L'intégrale curviligne

1. Définir l'intégrale curviligne – $\ell = \int_c d\ell$ – sur la courbe c. La courbe C est définie par $\mathbf{r}(s) = f_x(s)\mathbf{e}_x + f_y(s)\mathbf{e}_y + f_z(s)\mathbf{e}_z$. Rappel : $d\ell$ est associé à la tangent de la courbe $\mathbf{r}(s)$.
2. Calculer la longueur ℓ de la ligne droite entre $(0,0)$ et (a,b) avec l'intégrale curviligne, en sachant que $\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{e}_x + m\,x\,\mathbf{e}_y$.
3. Calculer le périmètre d'un cercle de rayon R en sachant que $\mathbf{r}(s) = R\cos(s)\mathbf{e}_x + R\sin(s)\mathbf{e}_y$, avec $s \in (0, 2\pi]$.

1.2 Géodésiques

Considérer deux point A et B sur un cylindre en $\mathbb{R}^3$ de rayon R donné par $x^2 + y^2 = R^2$, $z \in [0, H]$.



1. Écrive l'intégrale pour la longueur de la courbe en coordonnées cylindrique.
2. Trouver le chemin plus court entre A et B en utilisant Euler-Lagrange.

[Rappel : vous avez déjà vu des examples de maximisation/minimisation avec des contraintes (e.g. trouver le cylindre qui maximise le volume à surface A constante).]

2 Principe variationnel appliqué à la optique

Principe de Fermat : La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit minimale. Ici, on considère la propagation d'un rayon allant du point A (x_1, y_1) au point B (x_2, y_2) et on va décrire le temps de parcours par la fonctionnelle :

$$cT[y] = \int_{x_1}^{x_2} L(y, y')dx = \int_{x_1}^{x_2} n(x,y)\sqrt{1 + (y')^2}dx \tag{1}$$

ou $y' = \frac{dy}{dx}$ et la vitesse de la lumière est $c/n(x,y)$ avec n l'indice de refraction du milieu (à la position x, y), et donc $T[y]$ est le temps associé au chemin défini par $y(x)$.

1. Montrer que pour $n(x,y) = n_0$ avec n_0 une constante, $y(x) = mx + b$ (milieu homogene).
2. Montrer que pour $n(x,y) = n(x)$ et en utilisant $\frac{dy}{dx} = \tan(\theta(x))$ qu'on arrive à la condition $n(x)\sin(\theta(x)) = const$ (loi Snell-Descartes).
3. Montrer que pour $n(x,y) = n(y)$, avec $n(y) = n_0 - \lambda y$, on arrive à $y(x) = \lambda^{-1}\left[n_0 - D\cosh[(q-x)\frac{\lambda}{D}]\right]$, avec D et q des valeurs constantes (phénomènes de mirages).

3 La courbe brachistochrone

Résoudre le problème historique de la courbe brachistochrone : une bille ponctuelle de masse m est lâchée sans vitesse initiale du point A dans le champ de pesanteur : elle est guidée dans sa chute par une glissière située dans un plan jusqu'en un point B ; les frottements sont négligés. Notre objectif est de trouver la fonction $y(x)$ décrivant la forme que doit avoir la glissière pour que le temps de parcours de A à B soit minimum. Une ligne droite entre O et A ne donne pas le temps le plus court ! C'est ca l'observation qui a déclenché la curiosité de Galileo Galilei en 1633, mais on doit attendre jusqu'à 1696 pour connaitre la réponse qui a été donné par Jean Bernoulli.

1. Pour une glissière $y(x)$, calculer la vitesse de la particule au point $(x, y(x))$ à partir de la conservation de l'énergie mécanique.
2. Calculer le temps de parcours entre A et B pour la glissière décrite par $y(x)$ à l'aide de intégrale curviligne le long la courbe $y(x)$ et la vitesse calculée avant.
3. Le temps de parcours est défini par une fonctionnelle : $\int L(y, y')dx$. On peut utiliser les équations d'Euler-Lagrange (E-L) pour trouver la glissière $y(x)$ qui minimise le temps de parcours. Ecrire les équation d'E-L associé à la fonctionnelle dérivée.
4. Comme $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = \text{const}$ (identité de Beltrami). Utiliser l'identité de Beltrami pour trouver la courbe $y(x)$. (Important : on a utilisé une conservation pour trouver $y(x)$, en évitant intégrer les équations d'E-L que c'est toujours un chemin à suivre, mais plus long).