



RAPPORT DE STAGE

**"ANALYSE NUMÉRIQUE ET THÉORIQUE D'UN MODÈLE NEURONAL
SIMPLE SOUS FORÇAGE"**

El mahdouma Hicham

L'ORGANISME D'ACCUEIL

Nom : UNIVERSITE CERGY-PONTOISE

Adresse : 2 avenue Adolphe-Chauvin BP 222 95302

Cergy-Pontoise cedex

Représenté par: Prof. **Torcini Alessandro**

Encadrant : Dr. **di Volo Matteo**

Service dans lequel le stage sera effectué : LPTM

Mention "Université Cergy-Pontoise, stage de M1 Physique et applications"

Dates : du 23/04/2019 au 21/06/2019

Sommaire

1. L'organisme d'accueil	
2. Introduction: Neurones et Mathématiques:	4
2.1 Éléments des systèmes neuronaux	4
2.2 Trains à pointes	4
3. Étude du modèle intègre et tire:	5
4. Simulation numérique: La méthode d'Euler	7
5. Résultats	8
5.1 Point fixe et Cycle limite (<i>I constant</i>)	8
5.2 <i>I variable</i>	10
6. Implémentation en Python	12
7. Conclusion	13
8. Bibliographie	13

Ce stage, d'une durée de deux mois, a consisté sur l'étude de la dynamique d'un seul neurone soumis à différentes entrées temporelles à travers des analyses théoriques et des simulations en python pour obtenir des valeurs numériques.

Ce rapport présente le travail que j'ai effectué lors de mon stage au sein de l'Université Cergy-Pontoise. Il s'est déroulé du 23 avril au 21 juin 2019.

Le projet réalisé est très intéressant et enrichissant pour ma expérience professionnelle, surtout au niveau de la programmation; l'utilisation de Python dans le cadre de problèmes de physique.

Je vous expose dans ce rapport en premier lieu une présentation de l'organisme d'accueil. Ensuite je vous explique les différents aspects de mon travail durant ces deux mois, et enfin en conclusion, je résume les apports de ce stage.

1.L'organisme d'accueil: Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation

Le Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation est une unité mixte de recherche de l'université de Cergy-Pontoise et du Centre national de la recherche scientifique (UMR 8089).

Les activités de recherche du LPTM portent sur la physique théorique, physique statistique et physique numérique, et concernent principalement l'étude de problèmes ordre-désordre dans la matière, de phénomènes hors équilibre, de la physique non-linéaire et des modèles intégrables.

Le LPTM s'engage par ailleurs dans une mission de transmission des connaissances, par des activités d'enseignement à l'université de Cergy-Pontoise.

2. Introduction: Neurones et Mathématiques:

L'objectif principal de ce chapitre est d'introduire plusieurs notions élémentaires de neuroscience, en particulier les notions de potentiel d'action, de potentiel post synaptique, de seuil de mise à feu. Sur la base de ces notions, Nous allons étudier le modèle dynamique Quadratic integrate and fire (QIF). Les mathématiques utilisées pour le modèle simple sont essentiellement celles d'une équation différentielle linéaire unidimensionnelle.

2.1 Éléments des systèmes neuronaux

Le système nerveux est composé de deux types cellulaires : les neurones et les cellules gliales. Les neurones constituent la partie active du système nerveux (transmission et traitement de signaux) alors que les cellules gliales assurent une fonction support (protection, métabolisme, recyclage).

Un neurone est constitué d'un corps cellulaire, appelé aussi soma, et de deux types de prolongements les dendrites et l'axone.

Un neurone peut être divisé en trois parties distinctes sur le plan fonctionnel, appelées dendrites, soma et axones; voir la Fig1. Les dendrites jouent le rôle de «dispositif d'entrée» qui collecte les signaux d'autres neurones et les transmet au soma. Le soma est l'unité de traitement centrale qui effectue une étape importante du traitement non linéaire: si le total des entrées qui parviennent au soma dépasse un certain seuil, un signal de sortie est généré. Le signal de sortie est pris en charge par le «dispositif de sortie», l'axone, qui transmet le signal aux autres neurones.

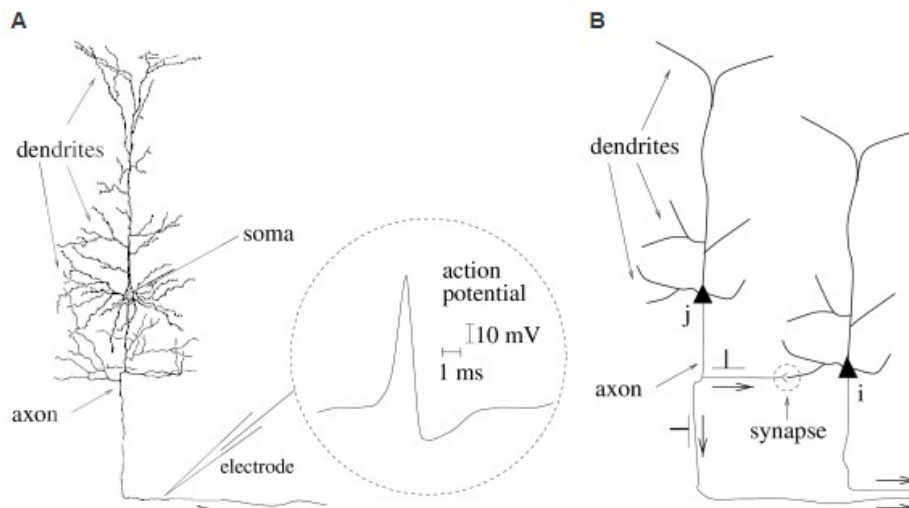


Fig.1: A. Un seul neurone dans un dessin. Dendrite, soma et axone peuvent être clairement distingués. L'encart montre un exemple de potentiel d'action neuronale (schéma). Le potentiel d'action est une courte impulsion de tension d'une durée de 1 à 2 ms et une amplitude d'environ 100 mV. B. Transmission du signal d'un neurone présynaptique j à un neurone postsynaptique i. La synapse est marquée par le cercle en pointillé. Les axones situés à l'extrémité inférieure droite mènent à d'autres neurones [1].

2.2 Trains à pointes

Les signaux neuronaux se composent d'impulsions électriques courtes et peuvent être observés en plaçant une électrode fine soit sur le soma, soit à proximité du soma ou de l'axone d'un neurone; voir la Fig1 et Fig2. Les impulsions, appelées potentiels d'action ou pointes, ont une amplitude d'environ 100 mV et généralement une durée de 1 à 2 ms.

La forme de l'impulsion ne change pas lorsque le potentiel d'action se propage le long de l'axone. Une chaîne de potentiels d'action émis par un seul neurone s'appelle un train de pics, une séquence d'événements qui se produisent à des intervalles réguliers ou irréguliers. Puisque les pics isolés d'un neurone donné se ressemblent, la forme du potentiel d'action ne contient aucune information. Ce sont plutôt le nombre et le moment des pointes qui importent. Le potentiel d'action est l'unité élémentaire de transmission du signal.

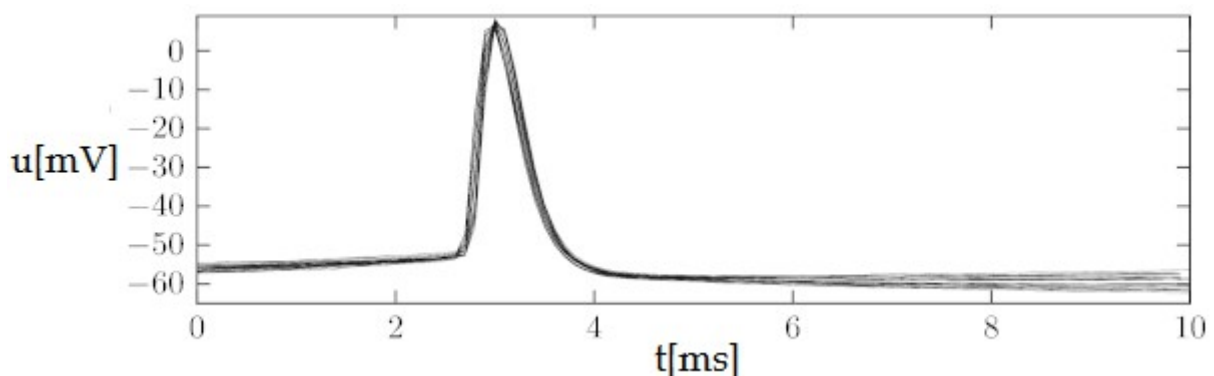


Fig.2: Les potentiels d'action sont des événements stéréotypés. Les enregistrements de potentiel membranaire alignés sur le temps de tension maximale montrent une faible variabilité de la forme du potentiel d'action [1].

3. Étude du modèle intègre et tire:

Le modèle QIF est un modèle de neurone biologique et un type de neurone d'intégration et de déclenchement. Contrairement aux modèles de neurones physiologiquement précis mais coûteux en calcul, comme le modèle de Hodgkin – Huxley, le modèle QIF cherche uniquement à produire des schémas de type potentiel d'action et ignore les subtilités telles que les variables de déclenchement, qui jouent un rôle important dans la génération de potentiels d'action dans un neurone réel. Cependant, le modèle QIF est incroyablement facile à implémenter et à calculer, et relativement simple à étudier et à comprendre. Ce modèle a donc trouvé une utilisation ubiquiste en neuroscience computationnelle.

La dynamique est décrite par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d\theta}{dt} = [1 - \cos\theta(t)] + [1 + \cos\theta(t)]I(t) \quad (1)$$

Où θ est la phase du neurone, t le temps et $I(t)$ une forçante externe qu'en générale, peut être variable dans le temps (I variable) ou constante ($I = \text{const}$) [2].

On fait un changement de variable, en posant : $V = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

L'équation (1) devient :

$$\dot{V} = V^2 + I$$

La variable V représente le voltage du neurone qui génère un potentiel d'action quand $\theta = \pi$.

Nous considérons le cas où le courant est constant en distinguant 3 possibles valeurs de I : $I < 0$, $I = 0$ et $I > 0$.

Pour $I < 0$ (Point fixe)

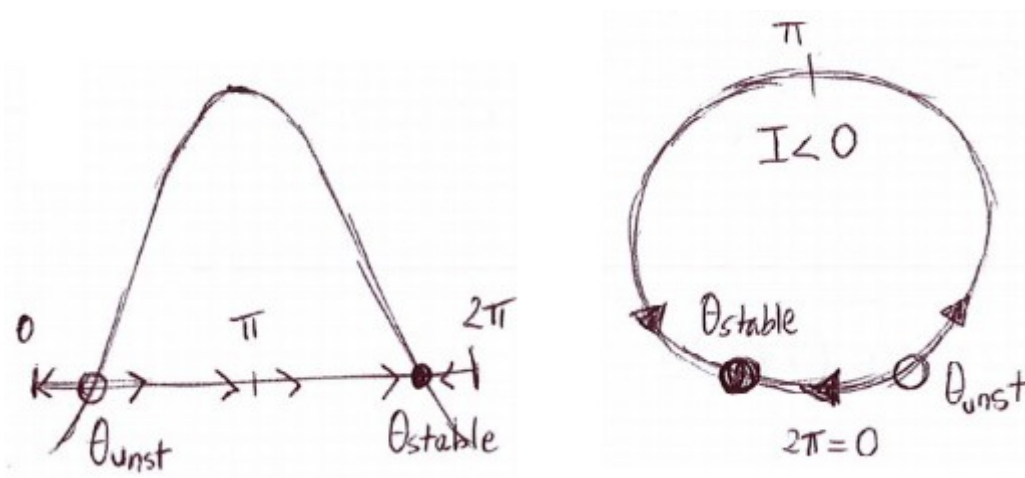


Fig.3: La coexistence à un point fixe stable et instable.

Considérons le cas où $I = \text{const} < 0$. Si nous commençons par une condition initiale $\theta(t_0) < \theta_{unstable}$, le flux sur le cercle unitaire se déplace vers θ_{stable} (voir Fig.3). Si nous commençons avec $\theta(t_0) > \theta_{unstable}$, le flux passe par tout le cercle, avec un pic à $\theta = \pi$, vers θ_{stable} . La solution stable est le potentiel de membrane au repos, tandis que l'instable représente les mécanismes de repos: une fois le seuil franchi, le potentiel d'action est généré et une impulsion est émise à un instant t tel que $\theta(t) = \pi$. Le pic est un événement totalement caractérisé par la condition $\theta(t) = \pi$.

Pour $I = 0$ (point critique)

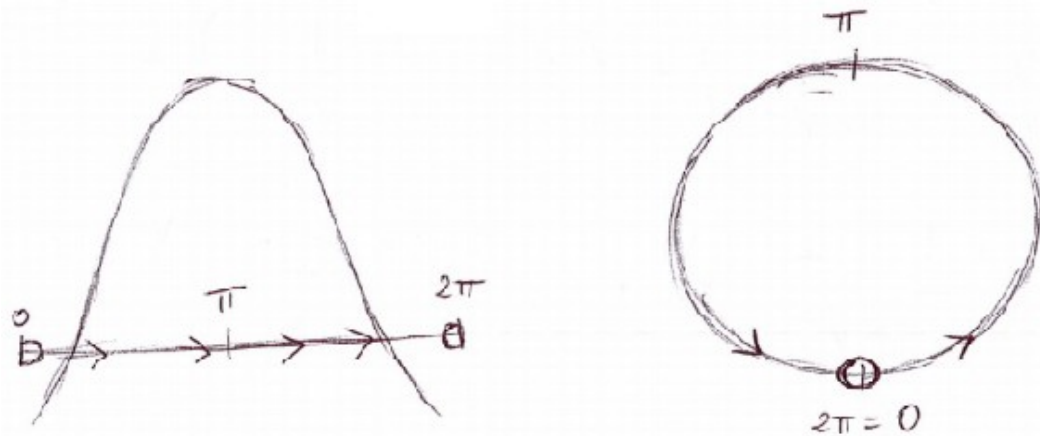


Fig.4: L'unification de points stable et instable.

À la criticité ($I = 0$, Fig.4), les points fixes instables et stables s'unissent au un seul point formant une boucle simple. (c'est le vecteur de coordonnées pour l'oscillateur à membrane unique).

Pour $I > 0$ (Cycle limite)

Dans le cas où $I = \text{const} > 0$ le système tourne le long du cercle en émettant un train d'impulsions périodiques. Pour calculer la fréquence du système oscillatoire supposée avoir à l'instant $t_0 = 0$, la condition initiale $\theta(0) = 0$, T est la période de temps nécessaire pour effectuer une rotation le long du cercle, donc $\theta(T) = 2\pi$.

Calculant la période T :

$$T = \int_0^T \frac{\dot{\theta}(t)}{[1 - \cos \theta(t)] + [1 + \cos \theta(t)]I(t)} dt$$

$$i \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \cos \theta + (1 + \cos \theta)I} d\theta$$

Posons $V = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$ donc $\theta \in [0, 2\pi] \implies V \in [-\infty, +\infty]$

$$\theta = 2 \arctan(V)$$

$$\dot{\theta} = \frac{2}{1+V^2} \dot{V}$$

$$\cos \theta = \frac{1-V^2}{1+V^2} \quad (2)$$

Remplaçant l'expression (2) dans l'équation (1), on trouve:

$$\dot{V} = V^2 + I$$

Alors l'expression de la période T devient:

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{V^2 + I} dV = \frac{1}{\sqrt{I}}$$

Les oscillations augmentent avec la continuité en augmentant I avec une fréquence:

$$v = \frac{1}{T} = \sqrt{I}$$

4. Simulation numérique: La méthode d'Euler

Afin de vérifier ces résultats théoriques, nous réalisons des simulations numériques pour l'évolution de la variable θ (appelée ici y pour une question de généralité).

L'idée principale est que «localement la courbe de la fonction y ressemble à sa tangente». Ainsi si h est proche de 0, on a

$$y(t_0+h) \approx y(t_0) + hy'(t_0) \approx y(t_0) + hF(y(t_0), t_0)$$

On peut donc approcher $y(t_0 + h)$ par la quantité $y(t_0) + hF(y(t_0), t_0)$.

On découpe ainsi l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ en n segments de même longueur $h = \frac{t_f - t_0}{n}$ (on dit que h est le pas). On dispose ainsi de n + 1 temps

$t_k = t_0 + kh$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

On va alors approximer la solution y à l'instant t_k par le nombre y_k défini par la relation de récurrence :

$$y_{k+1} = y_k + hF(y_k, t_k)$$

On initialise enfin avec la condition initiale $y_0 = y(t_0)$.


```

def euler(F, t0, tf, y0, n):
    Données:
        F(y,t) une fonction
        t0, t1 deux réels avec t0 < t1
        y0 un réel
        n un entier
        h = (tf - t0)/n
        y = y0
        t = t0
        Y = [y0]
        T = [t0]
    for k in range(n): # n itérations donc n + 1 points
        y = y + h * F(y,t)
        t = t + h
        Y.append(y)
        T.append(t)
    return T, Y

```

La quantité $h = t_f - t_0 / n$ est appelé le pas. Plus le pas est petit, meilleure sera l'approximation.

Remarque : un autre point de vue équivalent et en lien avec les méthodes numériques d'intégration pourrait être :

$$y(tk+1) - y(tk) = \int_t^{tk+1} y'(u) du = \int_{tk}^{tk+1} F(y(u), u) du \approx hF(y(tk), tk)$$

Cela revient à estimer l'intégrale $I = \int_{tk}^{tk+1} F(y(u), u) du$ par la méthode des rectangles à gauche sur $[tk, tk+1]$.

5. Résultats

Nous présentons ici les résultats de la simulation numérique de la dynamique du modèle QIF en comparant avec les prédictions théoriques. Nous commençons avec le cas de $I = \text{const}$ et après nous étudions le cas $I = \text{variable}$.

5.1 Point fixe et Cycle limite ($I = \text{cst}$)

Pour $I < 0$ (point fixe) :

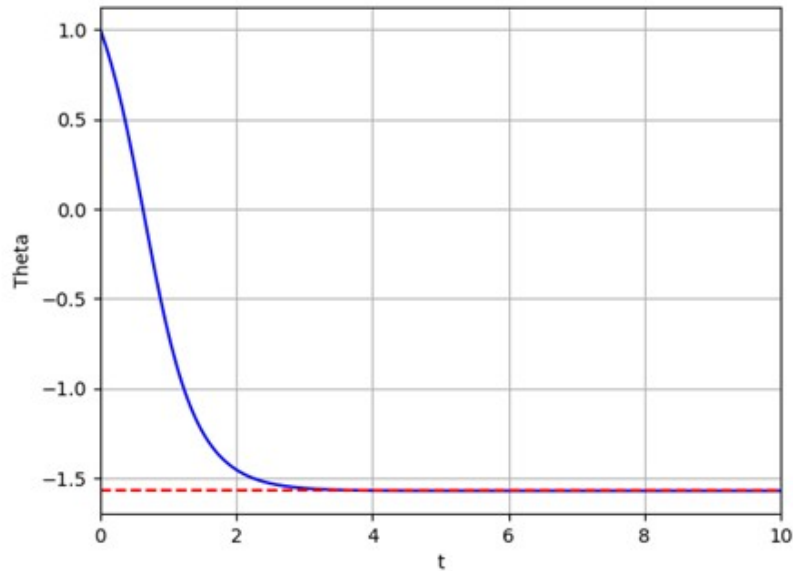


Fig.5: Le graphe de θ en fonction de temps qui montre bien l'existence le seul point fixe pour $I = -1$.

Dans le cas où $I < 0$, on voit bien l'existence d'un point fixe stable.

On a l'équation (1) :

$$\frac{d\theta}{dt} = [1 - \cos \theta(t)] + [1 + \cos \theta(t)] I(t)$$

Pour $\dot{\theta} = 0$, on a $[1 - \cos \theta_{fixe}] + [1 + \cos \theta_{fixe}] I = 0$

Enfin on trouve l'expression :

$$\cos(\theta_{fixe}) = \frac{1+I}{1-I}$$

la valeur théorique pour $I = -1$ $\theta_{fixe} = -\pi/2$

Comme on peut le voir sur la Fig.5, ce résultat (ligne rouge pointillée) est en accord avec la simulation numérique (ligne blue).

Pour $I > 0$ (cycle limite).

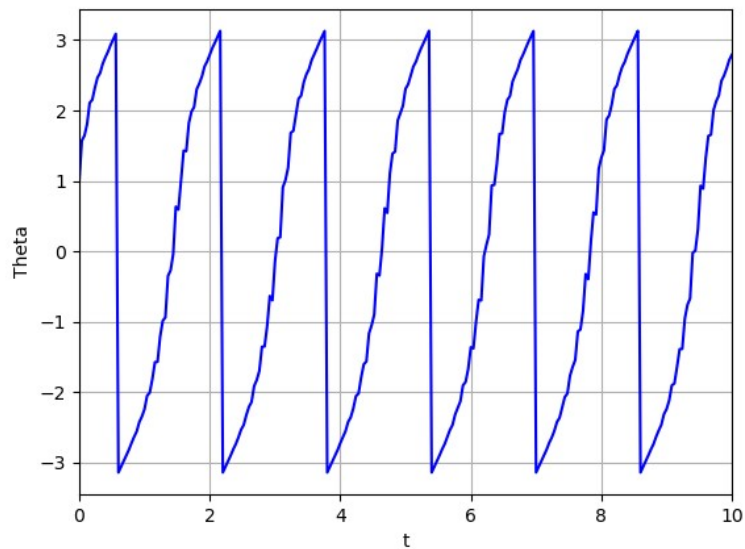


Fig.6 L'évolution de θ en fonction de temps.

Dans le cas où $I > 0$, on voit bien dans la Fig.6 que le système est périodique en faisant un train d'impulsions séparés.

Les potentiels d'action dans un train de pics sont périodiques. La distance minimale entre deux pointes définit la période du neurone T .

Dans simulation numérique, j'ai fait la moyenne sur toutes les périodes (environ 20 valeurs) en enlevant les 10 premiers valeurs.

Dans la prochaine étape, nous allons faire un graphe de la période T en fonction de I , pour cela en prenant plusieurs valeurs de I .

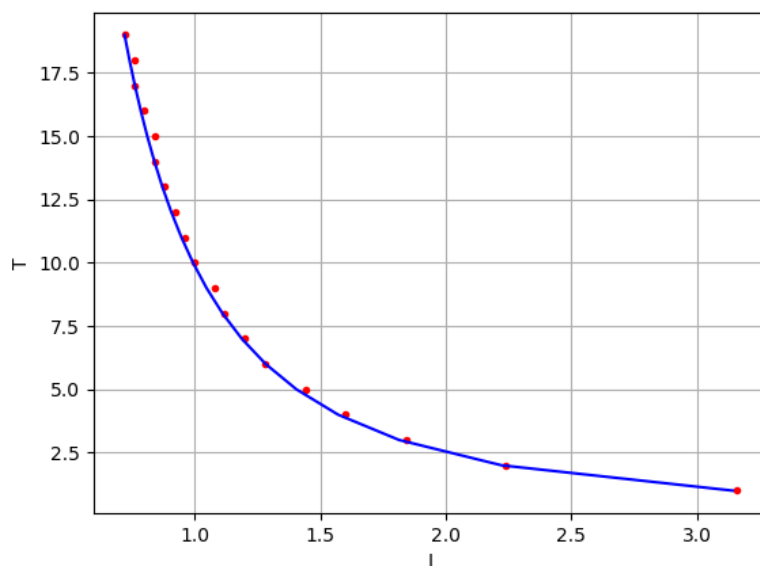


Fig.7: La période en fonction du courant; points rouges: Tnum (période calculée par la simulation numérique), ligne bleu: Tt (période calculée par l'expression théorique de T).

D'après la Fig.7, les résultats obtenus théoriques (en blue) et numériques (en rouge) sont presque identiques.

5.2 $I = \text{Variable}$

Nous considérons le cas où le courant est variable dans le temps.

On définit bien le courant (ou forçage) dans l'expression suivante:

$$I = A * (1 + \cos(wt)) + I_b$$

A : L'amplitude.

w : fréquence, une constante prend plusieurs des valeurs.

I_b : courant Bassing (valeur de référence).

Pour $w=4$ on voit la dynamique représenté en Fig.8

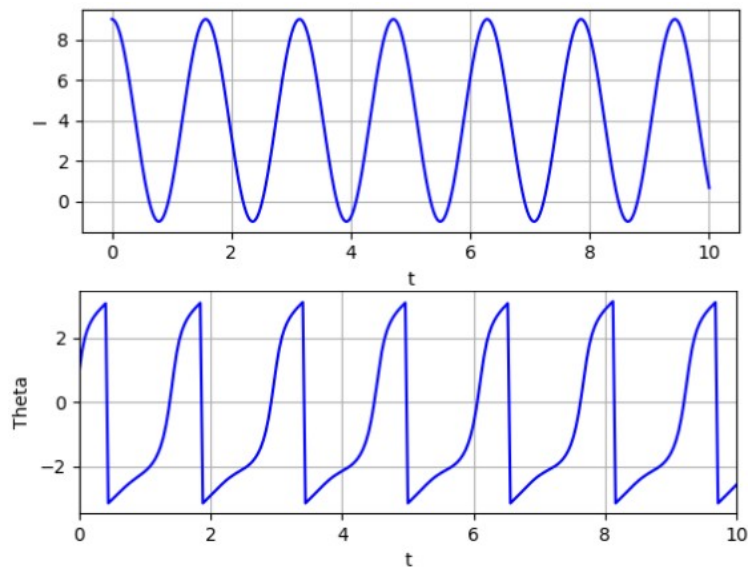


Fig.8: Différents graphes montrent la dynamique de θ et le courant I en fonction de temps pour $w=4$.

Pour $w=2$ on voit la dynamique représenté en Fig.9

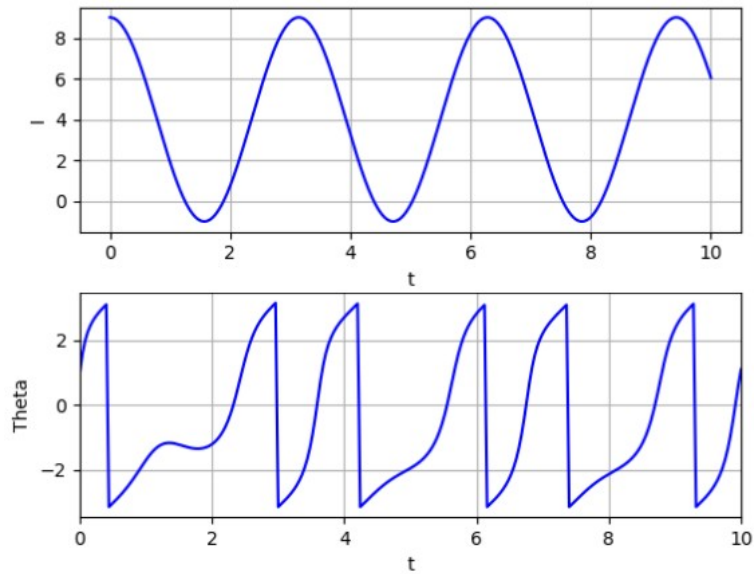


Fig.9: Différents graphes montrent la dynamique de θ et le courant I en fonction de temps pour $w=2$.

Lorsque l'oscillateur est excité par un terme harmonique à la pulsation ω et période T_0 , son équation différentielle change.

L'oscillateur et le forçage sinusoïdal ont la même période (cas $w=4$, $T/T_0=1$). Par contre dans l'autre cas ($w=2$), le système est quasiment périodique mais ils restent quand même corrélés sur les pics. Dans ce cas, nous disons que l'oscillateur est attaché ("locked") au forçage, on a 2 oscillations du θ pour chaque oscillation de I (locking 1:2). En calculant la période de l'oscillateur T comme la moyenne du interval de temps entre deux déclenchement consécutifs on obtient $T/T_0=0.5$.

Dans le cas général, on trouve d'autres résultats pour plusieurs valeurs de w où le système reste corrélé sur les pics avec différent rapports de fréquence. En Fig.7, chaque plateau présente une région du 'locking' à différent rapport T/T_0 .

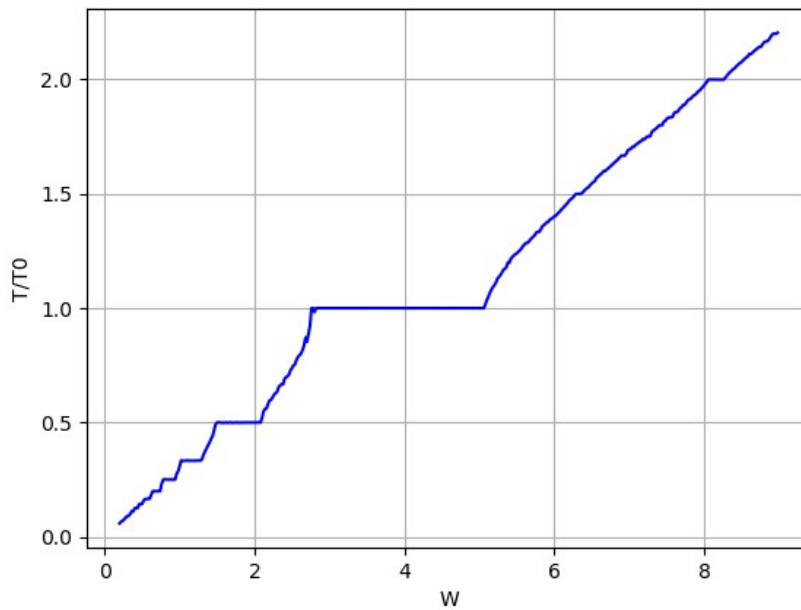


Fig.10: L'escalier du diable. T/T_0 représentant le rapport entre la période du neurone et celle de la forçage..

6. Implémentation en Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as mt

#Définition de la fonction
def fonction(y, t, I):
    return 1- np.cos(y) + (1+ np.cos(y))*I

# Condition à la limite
n = 10000 # nombre d'itérations
t0 = 0
y0 = 1
t = np.arange(1, 20, 1) #tableau des temps en lesquels sont calculées les variables

# Discrétisation du temps
dt=0.04 # Pas de temps de la simulation
tmax= n*dt # Temps total de la simulation

# Nombre de pas de discrétisation
t = np.linspace(t0, tmax, n)
A = 5 # L'amplitude
I_b = -1 # Bassing current
T_ex = []
W = np.arange(0.2, 10, 0.02)

for j in range(len(W)):
    I = A*(1 + np.cos(W[j]*t)) + I_b
    w = W[j]
    y = np.zeros(n) # l'initialisation de y
    y[0] = y0 # Stockage du point initial
    t_old = 0
    T_vect = []
```

```

for i in range(n-1):
    y[i+1] = y[i] + fonction(y[i], t[i], I[i]) * dt # appliquant la méthode d'Euler sur y

    if y[i+1] > 3.14:
        y[i+1] = -3.14
        T = (t[i] - t_old)/(2*np.pi/W[j])
        t_old = t[i]
        T_vect.append(T)

T_vect = T_vect[10:] # calculer la période en enlevant les 10 premières

def T_Moy(T_vect): # calculer la période en prenant la moyenne
    return sum(T_vect)/len(T_vect)

T_vect = T_Moy(T_vect)
T_ex.append(T_vect)

plt.subplot(211)
plt.plot(W,T_ex, 'b-')
plt.xlabel('W')
plt.ylabel('T/T0')
plt.grid()

plt.subplot(213)
plt.plot(t, I, 'blue')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('I')
plt.grid()

plt.subplot(212)
plt.plot(t, y, 'blue')
plt.xlim([0, 5])
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('Theta')
plt.grid()
plt.show()

```

7. Conclusion

Les résultats obtenus confirment bien l'accord entre le résultat théorique et numérique. Le stage m'a permis d'avoir une connaissance de base de neuroscience computationnelle, découvrir aussi la complexité dynamique d'un modèle simple (par exemple dans le cas de l'escalier de diable), et faire des codages en utilisant Python pour pratiquer des problèmes physiques.

8. Bibliographie

[1] <https://neurondynamics.epfl.ch/online/Ch1.S1.html>

[2] http://www.scholarpedia.org/article/Ermentrout-Kopell_canonical_model

[3] L'ordre dans le chaos : Vers une approche déterministe de la turbulence, [Pierre Bergé](#), [Yves Pomeau](#), [Christian Vidal](#)

