Chaos Déterministe

Alessandro Torcini et Andreas Honecker

LPTM

Université de Cergy-Pontoise

Effet papillon

Prédictibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ?
(Edward N. Lorenz - 1972)

Quand une petite perturbation peut avoir des effets catastrophiques ?

Systèmes linéaires contre Systèmes non linéaires

Linéaires contre non linéaires

1. Suite Linéaire

$$x_{n+1} = 4x_n$$

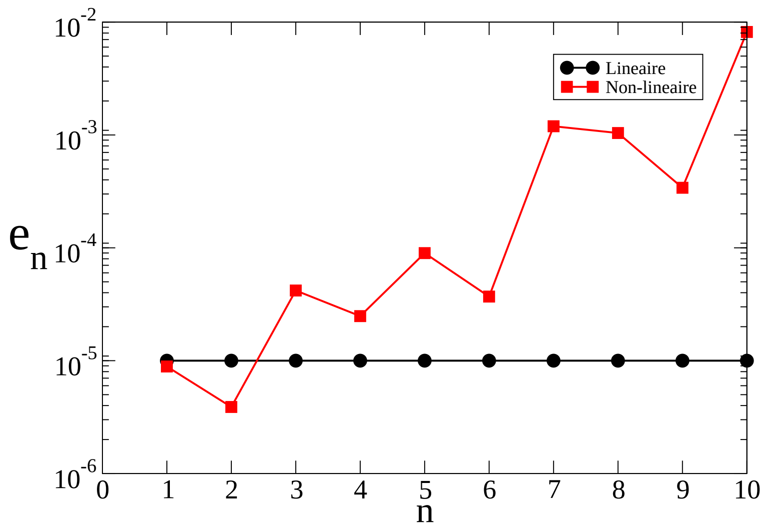
   (a) $x_0 = 0.1 \rightarrow x_1 = 0.4 \rightarrow x_2 = 1.6$
   (b) $x'_0 = 0.100001 \rightarrow x'_1 = 0.400004 \rightarrow x'_2 = 1.600016$
   (c) Estimons la distance (erreur) relative $e_n = \frac{\Delta x_n}{x_n} = \frac{|x_n - x'_n|}{x_n}$
   (d) $e_0 = \frac{\Delta x_0}{x_0} = 1 \times 10^{-5} \rightarrow e_1 = \frac{\Delta x_1}{x_1} = 1 \times 10^{-5} \rightarrow e_2 = \frac{\Delta x_2}{x_2} = 1 \times 10^{-5}$
   (e) L'erreur relative ne change pas avec n

Linéaires contre non linéaires

1. Suite Non-Linéaire

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) = 4x_n - 4(x_n)^2$$

   (a) $x_0 = 0.1 \rightarrow x_1 = 0.36 \rightarrow x_2 = 0.9216$
   (b) $x'_0 = 0.1000010 \rightarrow x'_1 = 0.3600032 \rightarrow x'_2 = 0.9216036$
   (c) croissance exponentielle de la perturbation initiale
   (d) Sensibilité aux conditions initiales (SCI)



Modèle de population

Le premier modèle de croissance démographique a été donné par Malthus (1798)

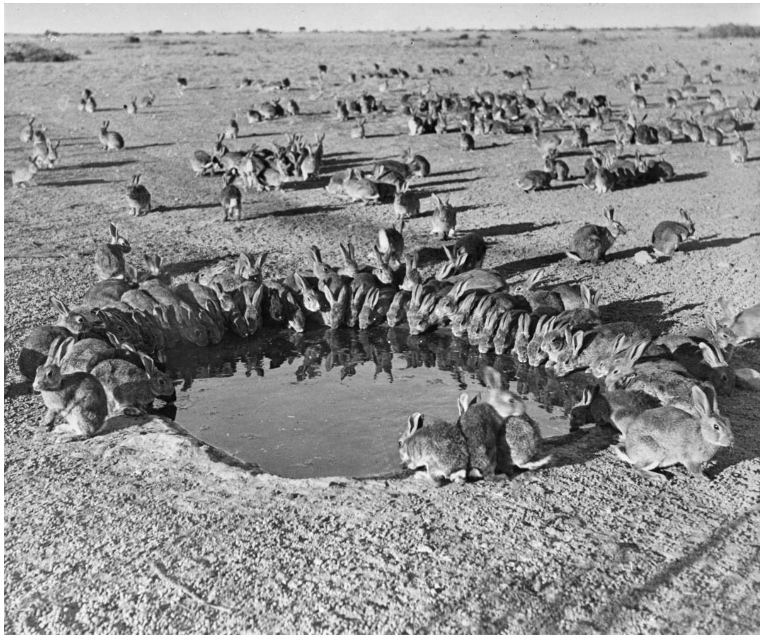
$$x_{n+1} = Kx_n$$

1. x_n est le nombre d'individus dans la population à la génération n
2. K est le pouvoir reproducteur de chaque individu
3. Malthus prédit mathématiquement que sans freins, la population augmente de façon exponentielle

$$x_n = (K)^n x_0 = \mathrm{e}^{\ln(K)n} x_0$$

La catastrophe démographique

Le lapin australien



Il est clair que ce type de modéle est absurde. Le seul contre exemple que je connaisse est celui de la population des lapins en Australie. En effet, 27 lapins furent introduits en 1859 dans le pays. N'ayant pas de prédateurs et une place quasiment infinie, ils se sont développés de manière exponentielle (ils étaient 22 millions 6 ans plus tard), dévorant une bonne partie de la végétation.

1. Pour stopper le rongeur, le renard, un de ses prédateurs naturels, est introduit. C'est un désastre : au lieu de s'attaquer aux lapins, le renard mange les petits marsupiaux, déjà gravement menacés.
2. La tendance actuelle est à introduire un virus immunocontraceptif (qui détruit les capacités de reproduction) pour reduir la propagation de l'espèce. Grâce à tous ces moyens, la population de lapins a quand même diminué d'un tiers et n'est plus que de deux cent millions. Mais la lutte n'est pas prête de finir.

Le modèle logistique

En 1840 Pierre Francois Verhulst (1804-1849) propose un modèle dit logistique qui prend en compte la limitation de la population.

1. l'accroissement de la population n'est proportionnel à la population que pour les petites valeurs de celle-ci.
2. Lorsqu'elle croît, des facteurs limitants apparaissent (place ou quantité de nourriture disponible, Prédateurs, etc.)

$$P_{n+1} = KP_n(M - P_n)$$

ou P_n est la popolation et M son valeur maximale.
Ceci peut être réécrit comme

$$x_{n+1} = 4rx_n(1 - x_n) \qquad x_n = \frac{P_n}{M}$$

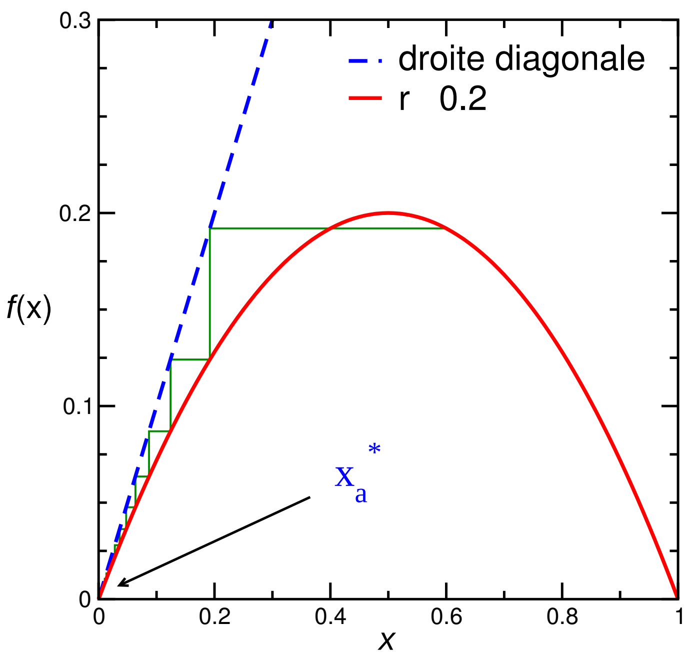
donc $0 \leq x_n \leq 1$

La suite logistique

La suite logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) := 4\,r\,x_n\,(1 - x_n)\,.$$

pour éviter que x_{n+1} devient negative, on considère seulement des $x \in [0,1]$ et des paramètres $r \in [0,1]$



itérations de la suite pour $r = 0.2$

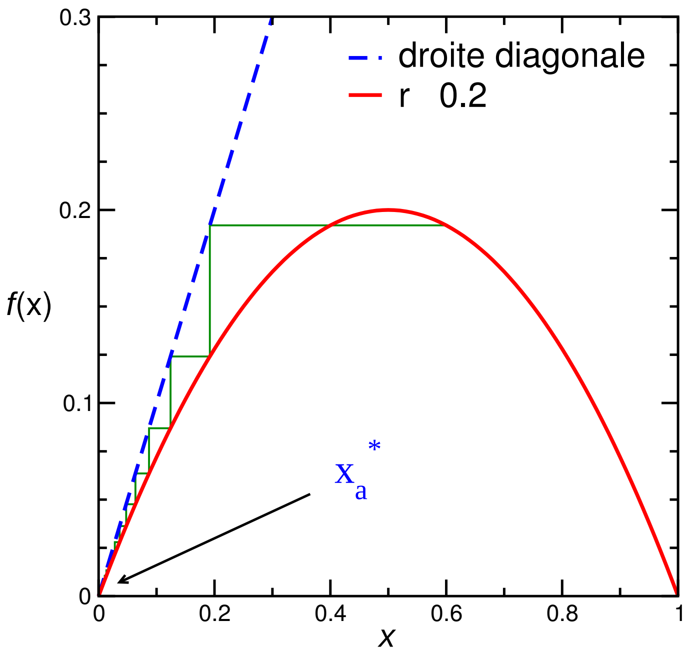
1. valeur initiale x_1
2. $x_1 \to x_2 = 0.8 \times x_1 \times (1 - x_1)$
3. vous signalez x_2 sur la droite diagonale
4. vous trouvez la nouvelle valeur de la suite $x_2 \to x_3 = 0.8 \times x_2 \times (1 - x_2)$
5. vous signalez x_3 sur la droite diagonale
6. vous trouvez la nouvelle valeur de la suite $x_3 \to x_4 = 0.8 \times x_3 \times (1 - x_3)$
7. etc

La suite logistique

La suite logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) := 4\, r\, x_n\, (1 - x_n)\,.$$

pour éviter que x_{n+1} devient negative, on considère seulement des $x \in [0,1]$ et des paramètres $r \in [0,1]$

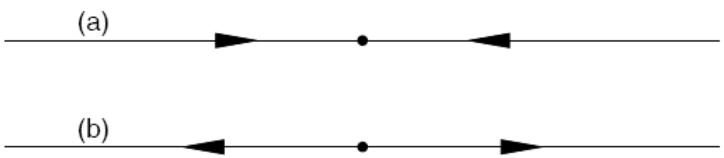


Points fixes x^*

1. Les points fixes sont donnés par l'intersection de la fonction $y = f(x)$ et de la diagonale $y = x$
2. $f(x^*) = x^*$
3. $4rx^* - 4r(x^*)^2 = x^* \Longrightarrow$

   $x^*[4rx^* + (1-4r)] = 0$
4. Deux solutions $x_a^* = 0$ et $x_b^* = \frac{4r-1}{4r}$
5. $x_b^* > 0$ seulement pour $r > 1/4$

Stabilité des points fixes



Les points fixes $x^* = f(x^*)$ sont attractifs ou répulsifs ?

Pour repondre nous faisons une analyse de stabilité linéaire, nous perturbons le point fixe x^* par δ_0 et recherchons son évolution :

$$x_0 = x^* + \delta_0 \to x_1 = x^* + \delta_1$$

donc

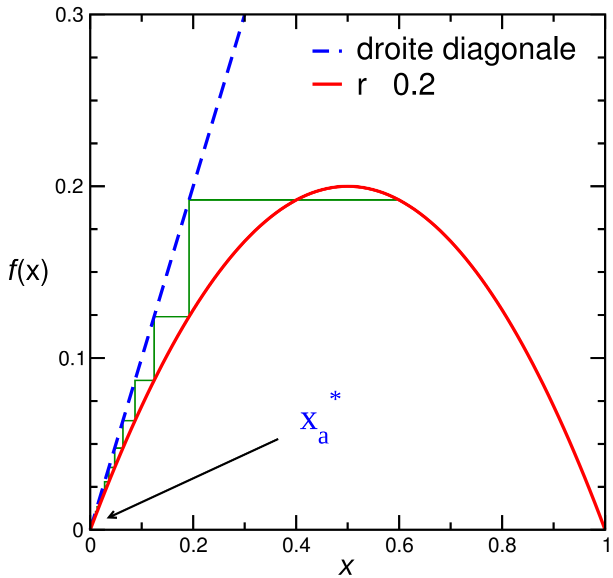
$$x_1 = f(x_0) = f(x^* + \delta_0) \simeq f(x^*) + f'(x^*)\delta_0 = x^* + f'(x^*)\delta_0$$

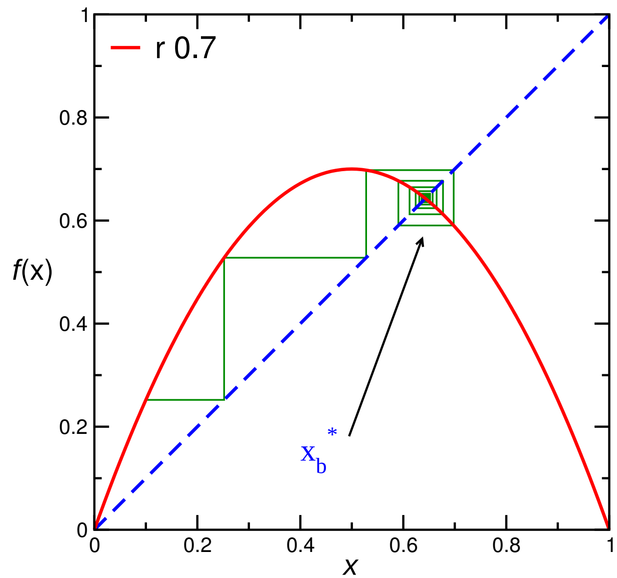
La perturbation évolue comme

$$\delta_1 = f'(x^*)\delta_0 \Longrightarrow \delta_2 = f'(x^*)\delta_1 = [f'(x^*)]^2\delta_0 \Longrightarrow \delta_n = [f'(x^*)]^n\delta_0$$

1. Si la valeur absolue de la dérivée $|f'(x^*)| < 1$ Point fixe attractif
2. Si la valeur absolue de la dérivée $|f'(x^*)| > 1$ Point fixe repulsif

Stabilité des points fixes



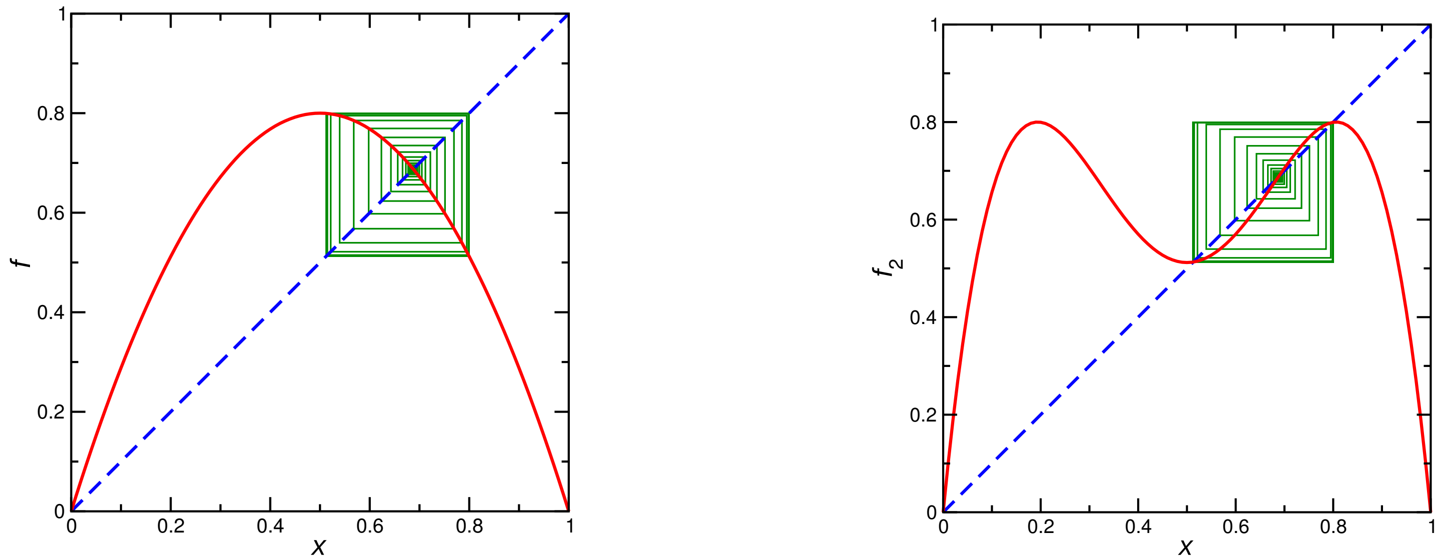


La dérivée de la suite logistique est

$$f'(x) = 4r - 8rx$$

1. Pour le point $x_a^* = 0 \Longrightarrow f'(x_a^*) = 4r$
2. Le point fixe x_a^* est stable pour $r < 1/4$
3. Pour le $x_b^* = \frac{4r-1}{4r} \Longrightarrow f'(x_b^*) = -4r + 2$
4. $|f'(x_b^*)| = |-4r + 2| < 1$ donc $-1 < 4r - 2 < 1$
5. Le point fixe x_b^* est stable pour $1/4 < r < 3/4$

Orbite périodique



1. Pour $r > 3/4$ le point fixe x_b^* est unstable
2. mais nous avons une orbite stable de période deux (x_1^*, x_2^*)
3. Donc $x_1^* = f(x_2^*) = f(f(x_1^*)) = f_2(x_1^*)$
4. Les orbites de période deux sont les points fixes de $f_2(x)$
5. on peut trouver la solution en résolvant
   $x = f(f(x)) = 4r[4rx(1-x)] - 4r[4rx(1-x)]^2$
6. il faut trouver les racines d'une equation polynomiale d'ordre quatre $\rightarrow$ recherche de zéro !!!
7. l orbite est attractif pour $0.75 < r \lesssim 0.862$

Suite Logistique

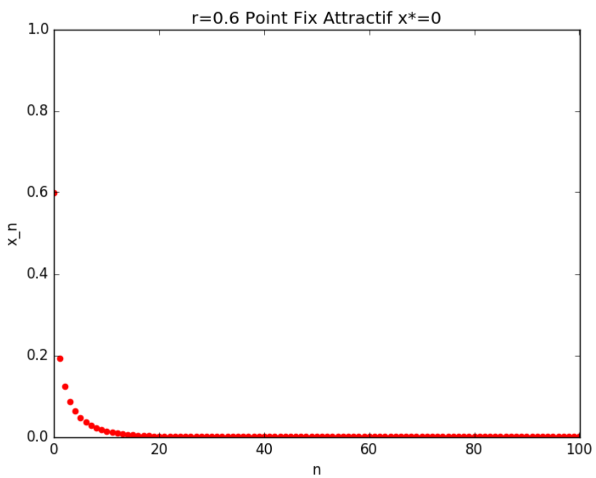
Exercice : Faites quelques iterations et étudiez le comportement de la suite logistique pour les cas suivants : (i) $r = 0.2$, $x_0 = 0.6$, (ii) $r = 0.7$, $x_0 = 0.1$, (iii) $r = 0.752$, $x_0 = 0.5$, (iv) $r = 0.8$, $x_0 = 0.68749$ et (v) $r = 0.865$, $x_0 = 0.5$. Créez des traces de x_n en fonction de n pour les cinq cas.

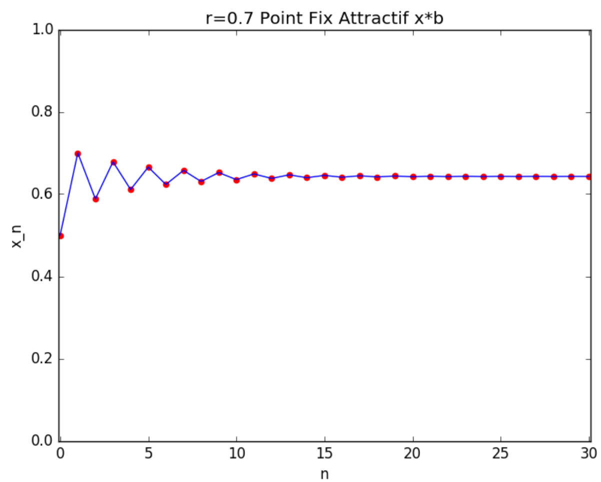
Suite Logistique

```
def logistique(rf,x):                # la suite logistique
  return 4*rf*x*(1-x)

r, x=0.2, 0.6
#r, x=0.7, 0.1
#r, x=0.752, 0.5
#r, x=0.8, 0.68749                   # x=0.6875 : point fixe repulsif
#r, x=0.865, 0.5
Nmax = 100
nv, xv = [], []                      # x_n pour les traces

for n in range(0,Nmax):              # "quelques" iterations
  nv.append(n)
  xv.append(x)
  x = logistique(r, x)
nv.append(Nmax)                      # stocker aussi x_Nmax
xv.append(x)

plt.scatter(nv, xv, color='red', marker='o')
plt.show()                           # montrer le graphe
```

Points fixes et orbites périodiques

1. Point Fixe $x^* = f(x^*)$
2. La Suite Logistique a 2 points fixes $x_a^* = 0$ et $x_b^* = \frac{4r-1}{4r}$

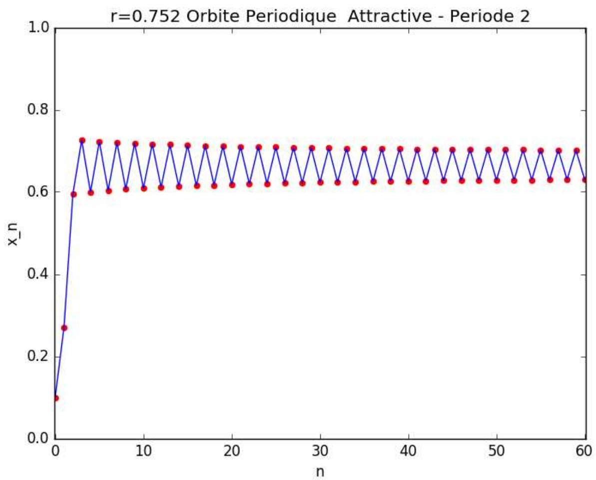


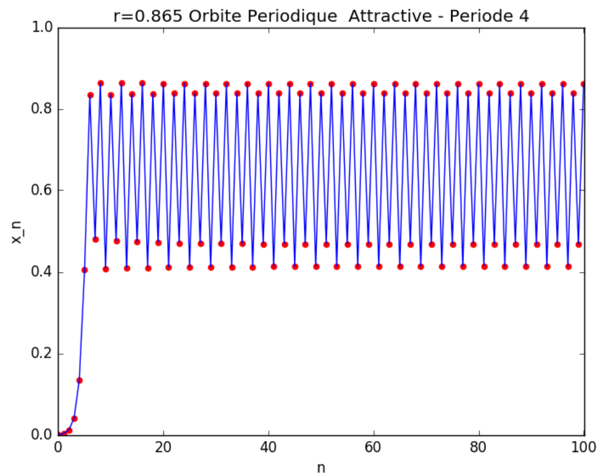


1. Le temps avant de tomber sur le point fixe est appelé transitoire

Points fixes et orbites périodiques

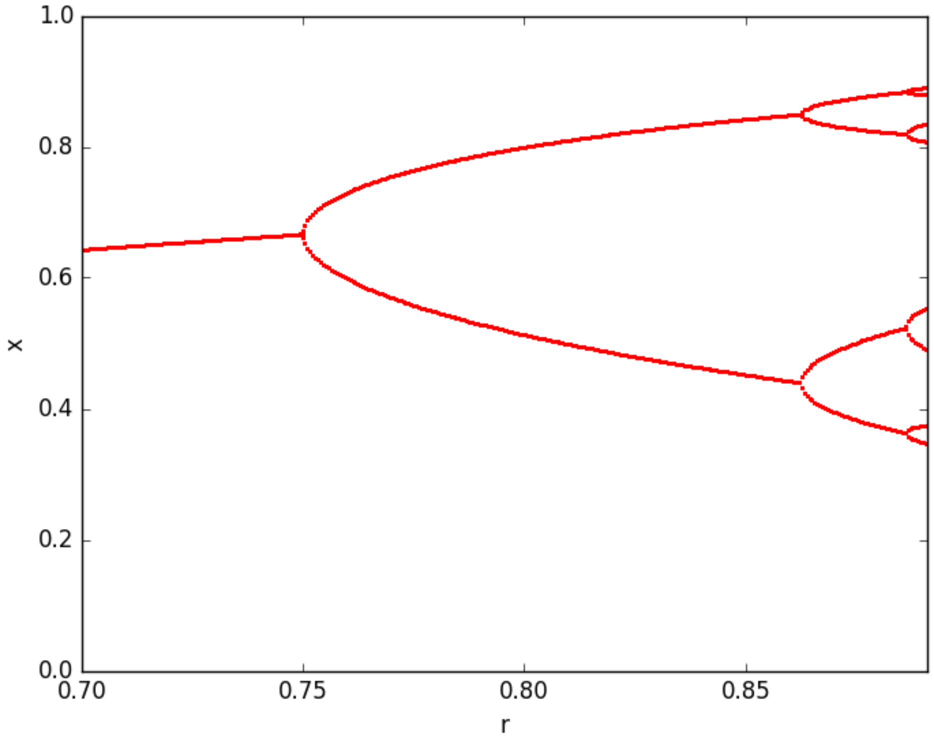
1. Une orbite (solution) périodique de période N est définie comme
2. $x_1^* \to x_2^* = f(x_1^*) \to x_3^* = f(x_2^*) \to \cdots \to x_N^* = f(x_{N-1}^*) \to x_1^* = f(x_N^*)$
3. Une orbite périodique avec la période deux
   $x_1^* \to x_2^* = f(x_1^*) \to x_1^* = f(x_2^*) \to x_2^* = f(x_1^*) \ldots$
4. $x_2^* = f[f(x_1^*)]$ Point fixe pour la fonction $f(f(\cdot))$





1. Le temps avant de tomber sur l orbite périodique est appelé transitoire
2. orbites périodiques et points fixes sont appelés attracteurs réguliers

Doublement de période



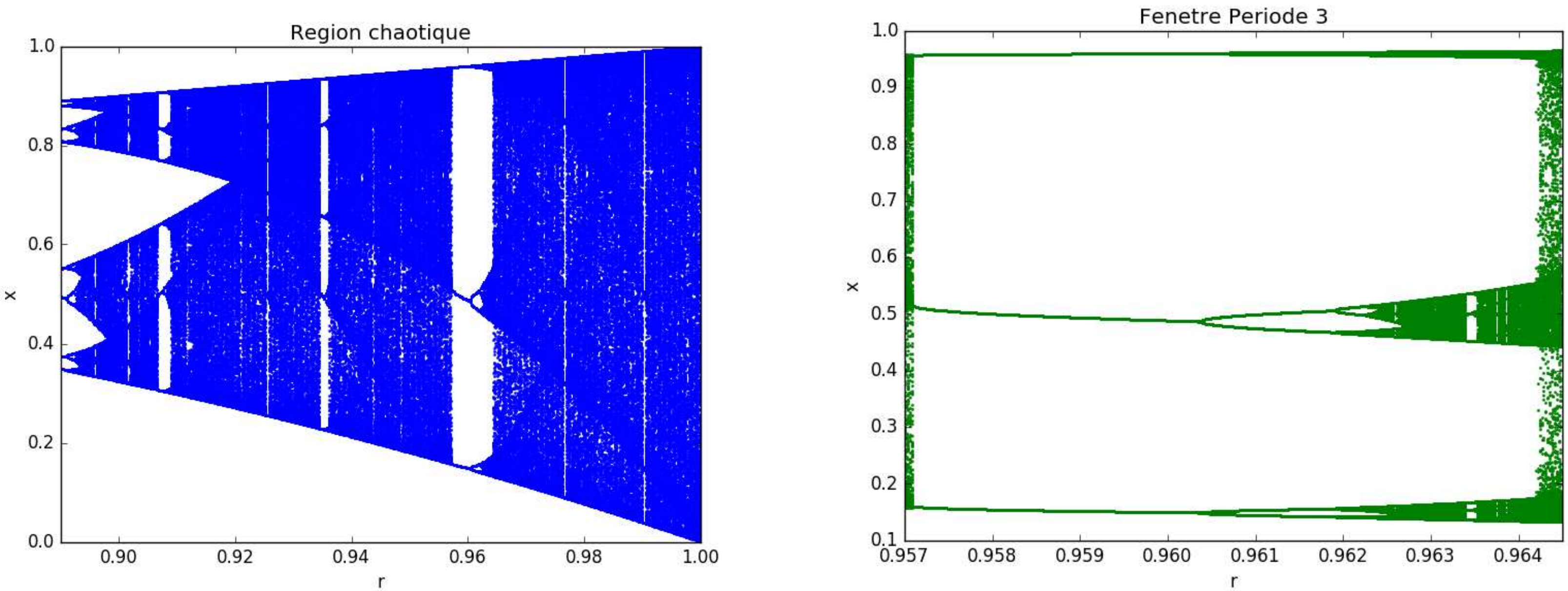
1. $r_1 = 3/4$ Période 2
2. $r_2 \simeq 0.86225\ldots$ Période 4
3. $r_3 \simeq 0.886\ldots$ Période 8
4. $$r_\infty = \lim_{n\to\infty} r_n = 0.89248625\ldots$$
5. Pour $r > r_\infty \to$ CHAOS

Aussi des attracteurs avec plus de deux valeurs $x_i^\star$ sont possibles. Si le nombre de points dans l'attracteur se double quand on augmente r un peu, on parle d'une bifurcation.

La route vers le chaos :

Cascade de doublements de période (Mitchell Feigenbaum)

Région chaotique



1. Pour $r_\infty = 0.89248625 < r < 1 \rightarrow$ Région chaotique
2. Pas seulement Chaos $\rightarrow$ Fenêtres périodiques
   (a) doublements de période 3 $\rightarrow$ 6 $\rightarrow 12 \rightarrow \ldots$
   (b) Il y a un nombre infini de fenêtres de (haute) période arbitraire dans la région chaotique

Le théorème de Sarkovskii (1964)

Considérons l'ordre suivant d'entiers positifs

$$3, 5, 7, \ldots, 2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, \ldots, 2^2 \times 3, 2^2 \times 5, 2^2 \times 7, \ldots,$$

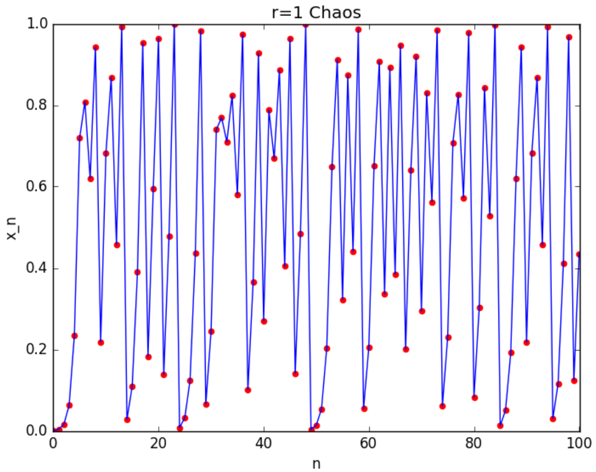
$$2^n \times 3, 2^n \times 5, 2^n \times 7, \ldots, 2^n, \ldots, 2^3, 2^2, 2, 1$$

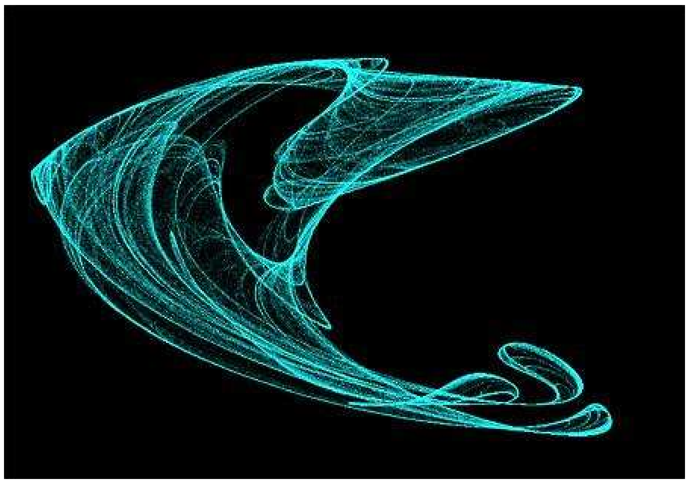
Le théorème dit

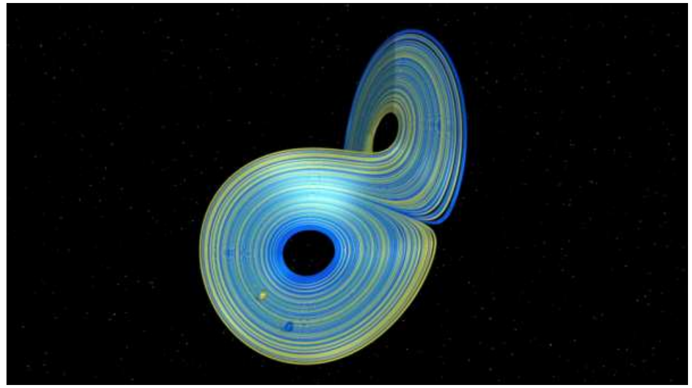
Soit une suite $x_{n+1} = f(x_n)$, alors si la suite admet une orbite périodique de période p, alors la carte admet aussi toutes les orbites périodiques avec période après p dans l'ordre ci-dessus.

1. Si la suite a une orbite de période p, ce qui n'est pas une puissance de 2, alors il a **un nombre infini** d'orbites périodiques
2. Si une orbite de la période trois existe alors le système admet des orbites périodiques de toute période possible
3. **La période trois implique le chaos** [Li and Yorke (1975)]

Attracteurs étranges







http ://www.chaos-math.org/fr

Mesure du chaos

Comment mesurer le niveau de chaos dans le système ?

Dans une region chaotique, le comportement est très sensible aux perturbations

Tout à fait, deux trajectoires qui sont très proches au debut δ_0, auront une divergence exponentielle après n iterations :

$$|\delta_n| \approx |\delta_0| \, \mathrm{e}^{\lambda \, \mathrm{n}}$$

où

$$\delta_j := x_j - x'_j$$

sont les differences de deux trajectoires x_j, x'_j dans l'iteration j.

λ est appelée exposant de Lyapunov

1. Si l exposant de Lyapunov est positif $\lambda > 0$ le système est chaotique
2. Si $\lambda < 0 \implies$ Point fixe attractif
3. Si $\lambda = 0 \implies$ Orbite périodique

Exposant de Lyapunov

Pour évaluer l’exposant lyapunov on devrait faire comme ça

1. Faire les premiers 1000 iterations et jetez-les ! Transitoire
2. Maintenant vous êtes sur l’attracteur
3. Perturbez l’orbite x avec une petite perturbation $\delta = 10^{-8} \Longrightarrow x' = x + \delta$
4. Suivez en même temps l’orbite originale et l’orbite perturbée

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad x'_{n+1} = f(x'_n)$$

5. Calculez le valuer absolue de la difference $\delta_n = |x_n - x'_n|$
6. estimez l’exposant lyapunov $|\delta_n| \approx |\delta_0|\, \mathrm{e}^{\lambda\ \mathrm{n}}$ comment

$$\lambda = \frac{1}{n} \log \frac{|\delta_n|}{|\delta_0|}$$

Exposant de Lyapunov

```
# suite logistique - determination d'exposant de Lyapunov
import numpy as np                # importer le module NumPy comme "np"
import matplotlib.pyplot as plt # importer le module Matplotlib comme "plt"

def logistique(rf,x):             # la suite logistique
  return 4*rf*x*(1-x)

r = 0.751                # valeur du parametre r

x = 0.5                           # x0
DeltaX = 1e-8                     # magnitude de perturbation

for n in range(0,1000):           # jeter les 1000 premiers iterations
  x = logistique(r, x)
xp = x + DeltaX                   # perturber
```

Exposant de Lyapunov

```
nv, DeltaXv = [], []

Nit = 100                    # nombre des interations que restent a faire

for n in range(0,Nit+1):          # et calculer les 50 differences prochains
  nv.append(n)
  DeltaXv.append(np.abs(xp-x))    # stocker valuer absolue de la difference
  x  = logistique(r, x)           # suite x
  xp = logistique(r, xp)          # et suite perturbee x'

# estimer lambda a l'aide du rapport entre
#les difference au debut et apres Nit iterations
print "valeur estimee pour lambda = ", np.log(DeltaXv[Nit]/DeltaXv[0])/Nit

# afficher la trace de differences apres la perturbation
plt.semilogy(nv, DeltaXv, marker='o')
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("|Delta x|")
plt.xlim(-0.1,Nit+0.1)
plt.show()                        # montrer le graphe
```

échelle semi-logarithmique

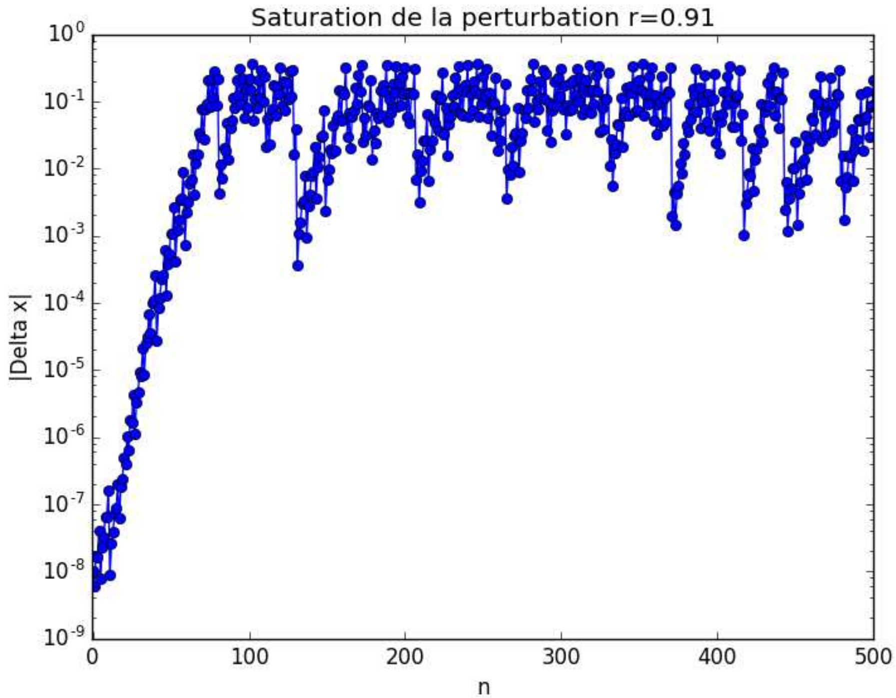
Une échelle semi-logarithmique pour le graphe où x est linéaire et y logarithmique ($\ln(y)$) peut être obtenu comme suit

```
plt.semilogy(nv, DeltaXv, marker='o')
```

Une échelle logarithmique pour le graphe peut être obtenu comme suit

```
plt.loglog(nv, DeltaXv, marker='o')
```

Exposant de Lyapunov : problème



1. La perturbation δ_n ne peut pas croître plus que la taille de l'attracteur $\mathcal{O}(1)$
2. Saturation de la perturbation
3. Le nombre d'itérations n ne peut pas être trop grand

Comment résoudre le problème

Pour repondre nous faisons une analyse de stabilité linéaire, nous perturbons le point x_0 par δ_0 et recherchons son évolution :

$$x'_0 = x_0 + \delta_0 \Longrightarrow x'_1 = x_1 + \delta_1$$

donc

$$x'_1 = f(x'_0) = f(x_0 + \delta_0) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\delta_0 = x_1 + f'(x_0)\delta_0$$

La perturbation évolue comme

$$\delta_1 = f'(x)\delta_0 \Longrightarrow \delta_2 = f'(x_1)\delta_1 = f'(x_0)f'(x_1)\delta_0$$

donc nous avons une suite pour les perturbations δ_n avec la dérivée de la fonction $f'(x_n)$

$$\delta_{n+1} = f'(x_n)\delta_n = f'(x_n)f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})\dots f'(x_1)\delta_0 \qquad \delta_n = x'_n - x_n$$

ou $\delta_n = x'_n - x_n$ est la difference de deux trajectoires x_n, x'_n dans l'iteration n.

Exposant de Lyapunov

Pour évaluer l'exposant lyapunov avec une grande précision on devrait faire comme ça

1. Faire les premiers 1000 iterations et jetez-les ! Transitoire
2. Maintenant vous êtes sur l'attracteur
3. Considerez l'orbite x et son dérivé
4. Suivez en même temps l'orbite originale et la dérivé

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad f'(x_n)$$

5. additionnez les logarithmes de la dérivée

$$S(n) = S(n-1) + \log|f'(x_n)|$$

6. estimez l'exposant lyapunov comment

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log|f'(x_i)| = \frac{S(n)}{n}$$