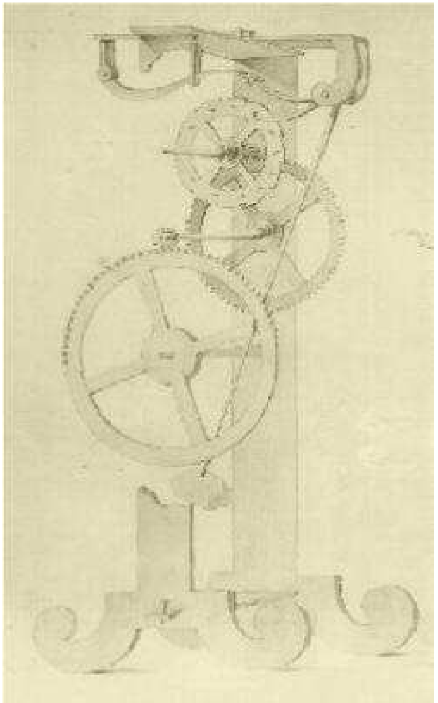
Pendules et Oscillateurs

Alessandro Torcini

LPTM

Université de Cergy-Pontoise

Résumé



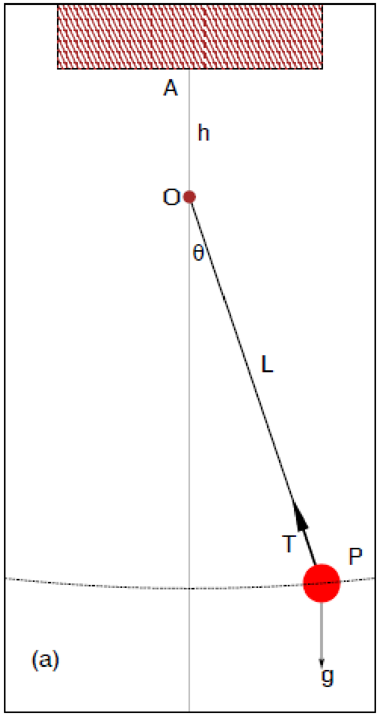
Galileo Gailei a été le premier qui a eu l'idée d'exploiter la régularité des oscillations pendulaires pour réaliser une horloge, mais le scientifique néerlandais Christian Huygens a réalisé cela en 1656.

La première horloge a eu une erreur inférieure à 1 minute par jour, une incroyable précision à l'époque.

Tout le monde affirmera en toute sécurité que les oscillations d'un pendule sont régulières, mais comme nous verrons ceci est complètement **FAUX**

Du pendule au chaos

Le pendule non linéaire



1. La masse **M**
2. attaché à un Pivot **O**
3. parmi un fil inextensible et de masse négligeable de longueur **L**
4. Deux forces agissent sur la masse :
   (a) la gravité $\mathbf{F_g} = M\mathbf{g}$
   (b) la tension du fil $\mathbf{T} = M g \cos(\theta)$

En appliquant la deuxième loi de Newton (**F = ma**), il apparaît que le système peut être décrit simplement par l'angle θ entre le fil et l'axe vertical et par la vitesse angulaire $d\theta/dt$, l'équation du mouvement est indépendante de la masse

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Équation différentielle non linéaire du second ordre :

1. Solution numérique et visualisation des orbites
2. Pour les petits angles, on peut approximer $sin(\theta) \simeq \theta$

Le pendule linéaire

Pour **les petits angles**, on peut approximer $sin(\theta) \simeq \theta$

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta = -\omega_0^2\theta$$

Ceci est un **Équation différentielle linéaire** et il peut être résolu analytiquement, l'angle **oscille périodiquement** dans le temps

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

La période est

1. $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
2. T est indépendant de la **amplitude** A et de la **phase** phi

L'énergie est conservée

La dynamique du pendule non linéaire

L'équation du pendule non linéaire peut être résolue uniquement numériquement

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \qquad ,$$

Afin de pouvoir utiliser une de nos méthodes numériques, nous devons d'abord réduire l'équation à une équation de premier ordre. Comme avant, nous introduisons deux fonctions

$$y_1(t) := \theta(t)\,, \qquad y_2(t) := \frac{\mathrm{d}\,\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,y_1(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

et nous trouvons deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \tag{2}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{g}{L}\sin(y_1) \qquad , \tag{3}$$

La dynamique du pendule non linéaire

Finalement avec la notation vectorielle nous trouvons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\frac{g}{L}\sin(y_1(t)) \end{pmatrix} . \qquad (4)$$

où

$$\vec{y}(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} , \qquad \vec{F}(\vec{y}(t), t) := \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\frac{g}{L}\sin(y_1(t)) \end{pmatrix}$$

Enfin l'équation différentielle prend la forme vectorielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}(t) = \vec{F}(\vec{y}(t), t) .$$

L'intégration numérique avec la méthode Euler devient

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \vec{F}(\vec{y}(t), t)h$$

oú $\vec{y}_n = \vec{y}(t_n)$ et $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}(t_{n+1})$ et $t_{n+1} = t_n + h$ avec h le pas d'integration

intégration numérique (Euler)

```
Tmax = 10

def pendule(y):
    w = y[0]
    v = y[1]
    return np.array([v, -g/L*np.sin(w)])

def euler(F, t0, y0, deltaT, Tfin, tv, hv, vv):
    t = t0
    y = y0
    tv.append(t)
    hv.append((y[0]))
    vv.append(y[1])

    while t<=Tfin+1e-8:
        y = y+deltaT*F(y)
        t += deltaT
        tv.append(t)
        hv.append(y[0])
        vv.append(y[1])
```

intégration numérique (Euler)

```
t = 0

g=9.81
L=2  # periodique

x=np.pi
y=0.1  #Rotations (orbites ouvertes)

x = 0.
y = 0.22 # Oscillations (orbites limitées)

t1v, h1v, v1v = [], [], []   # transitoire
euler(pendule, 0, np.array([x, y]), 0.0001, 50, t1v, h1v, v1v)

t1v, h1v, v1v = [], [], []
euler(pendule, 0, np.array([x, y]), 0.0001, Tmax, t1v, h1v, v1v)
```

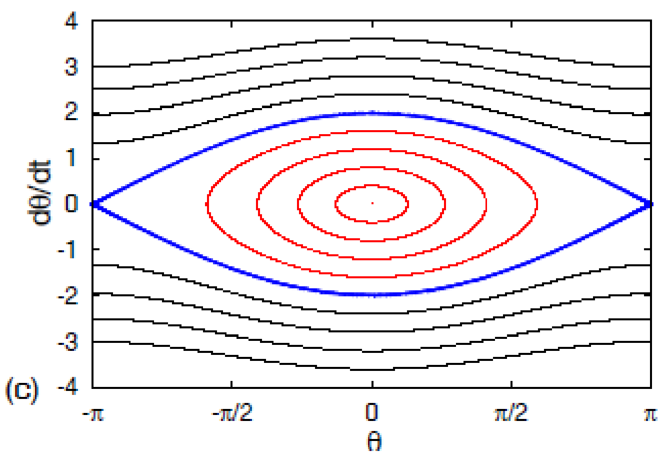
Montre deux graphiques en même temps

```
plt.figure(1)
plt.plot(t1v, h1v, color='green',label='theta')
plt.plot(t1v, v1v, color='blue', label='d theta/dt')
plt.title("Orbite")
plt.xlabel("time")
plt.ylabel("y")
plt.legend()


plt.figure(2)
plt.plot(h1v,v1v, color='red')
plt.title("Espace de phase")
plt.xlabel("theta")
plt.ylabel("d theta/dt")
plt.legend()


plt.show()
```

Espace de phase

Nous traçons graphiquement la dynamique dans l'espace de phase

$$\left(\theta; \frac{d\theta}{dt}\right)$$



Chaque courbe dans l'espace de phase s'appelle une trajectoire

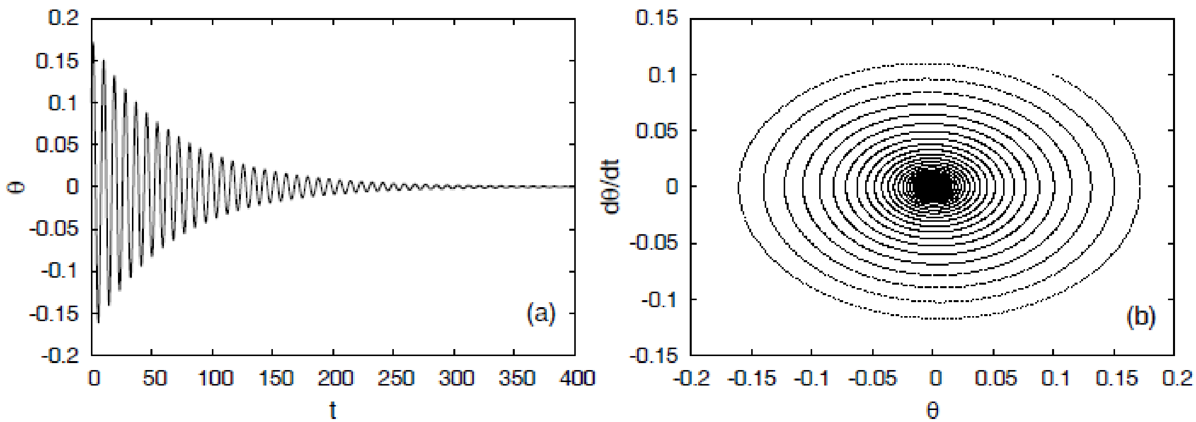
1. Oscillations (orbites limitées)
2. Rotations (orbites limitées)
3. La séparatrice correspond au pendule en commençant par zéro vitesse de la position d'équilibre instable $\theta = \pi$ et en revenant à zéro vitesse dans un temps infini

Le mouvement continue à jamais, le système est conservative, son énergie est constant

Pendule avec frottement

La modélisation précédente n'est pas réaliste, la friction due à láction de l'air sur le pendule est toujours présente. Cette force est proportionnelle à la vitesse $d\theta/dt$ et elle agit contre le mouvement :

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = -\gamma\frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{L}\sin\theta \qquad \gamma \text{ est la constante d'amortissement}$$



L énergie n est plus conservée, le frottement dissipe l énergie, et le pendule se termine toujours dans l'état de repos $\theta = 0$ En langage mathématique :

1. le système ne conserve pas l'énergie
2. $(\theta, d\theta/dt) = (0, 0)$ est un attracteur pour la dynamique : un point fixe stable

Le pendule entraîné et amorti

O Botafumeiro - Santiago de Compostela

Un géant **encensoir** de 53 kg (1,60 m hauteur) suspendus à la voûte de la cathédrale par une corde de 21 mètres.

En raison de la dissipation le pendule veut s’arrêter, mais en faisant varier périodiquement la longueur de la corde il est possible de le maintenir en mouvement : **pompage paramétrique de énergie !**

Le pendule entraîné et amorti

O Botafumeiro - Santiago de Compostela

Au départ le sacristain donne une impulsion à l'encensoir lui permettant d'atteindre une amplitude angulaire de 10^o environ.

Avec une expérience séculaire, les préposés à la traction des cordes règlent au bon moment la longueur de corde pour amplifier le mouvement initial. En une minute et demi, les tiraboleiros arrivent à donner au botafumeiro une amplitude de 80^o environ, de sorte que l'encensoir parcourt toute la croisée entre transept et nef principale, depuis la nef « Azabacheria » jusqu'à la nef « Platerias ».

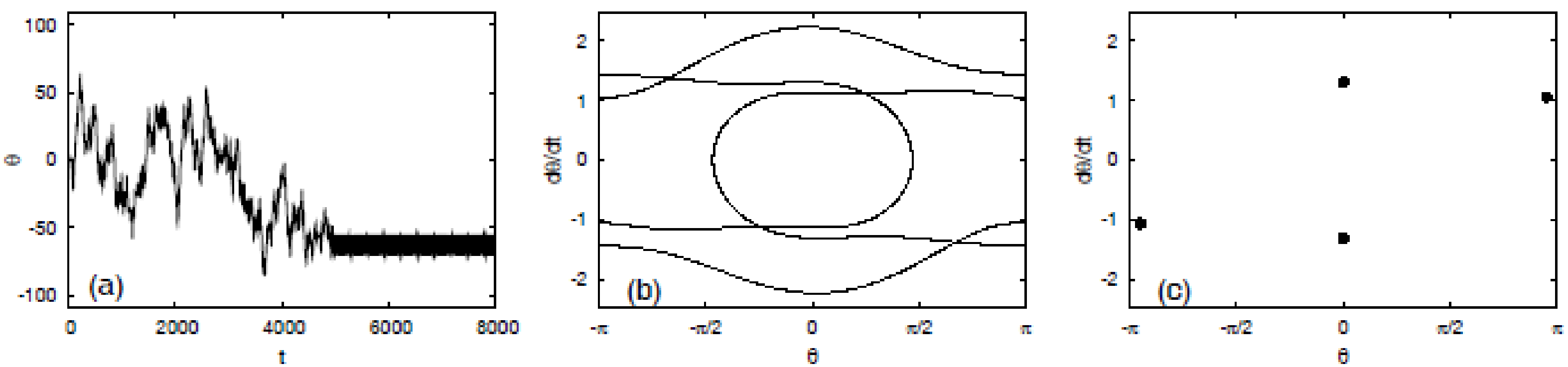
La trajectoire de l'encensoir s'étire alors sur près de 60 mètres, au grand étonnement des pèlerins, en passant au ras du sol à près de 70 km par heure !

Le pendule entraîné et amorti

L'équation du mouvement du pendule amorti non linéaire entraînée lorsque le pivot se déplace périodiquement dans le temps comment $h(t) = h_0 \cos(\omega t)$ est

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = -\gamma \frac{d\theta}{dt} - (\frac{g}{L} - \frac{h_0\omega^2}{L} \cos(\omega t)) \sin\theta$$

la période du terme de forçage est $T_0 = 2\pi/\omega$

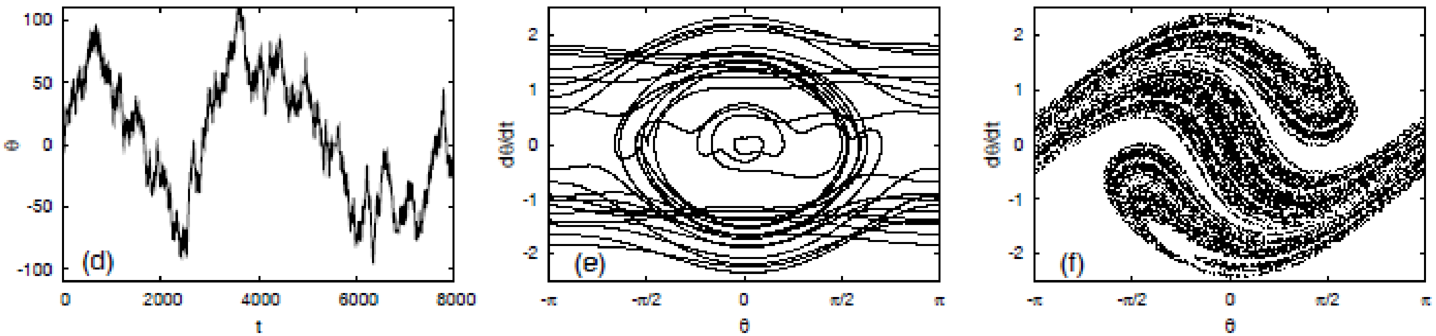


Pour un certain choix des paramètres L, h_0, ω on observe

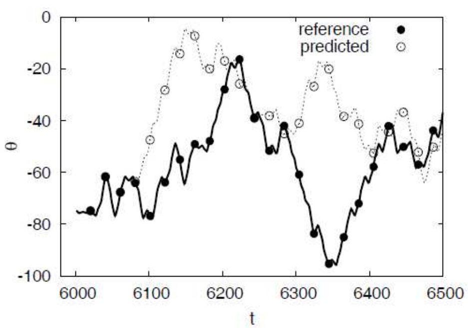
1. Après un **transitoire** la dynamique se termine sur une orbite périodique
2. En observant la trajectoire stroboscopique aux temps $t_n = nT_0$ seulement 4 points restent : mouvement périodique avec période $4T_0$ (**Application stroboscopique**)

Le pendule entraîné et amorti

Pour un autre choix des paramètres L, h_0, ω



1. La dynamique est toujours irrégulière
2. Le plan de phase est presque remplie
3. L'observation stroboscopique révèle un **Attracteur Chaotique**



Deux conditions initiales différentes **moins de 1 partie/100,000** donner lieu à des trajectoires completements différentes : **sensibilité aux conditions initiales**

L'effet papillon