« MULTIFRATTALI »

Ricopriamo l'attrattore con delle SCATOLE (cubi) di lato δ: $B(\delta, \underline{x})$

$$\Downarrow$$

La MISURA NATURALE del cubo sarà

$$\mu(\delta, \underline{x}) = \int_{B(\delta, \underline{x})} d\mu = \lim_{T \to \infty} \frac{\tau(B)}{T}$$

Se $\mu(\delta, \underline{x})$ è la stessa $\forall$ cond. iniziale $\underline{x}_0$ a parte un insieme di MISURA NULLA allora è la vera MIS. NATURALE

Def. DIMENSIONE PUNTUALE

$$\mu(\delta, \underline{x}) \sim \delta^{\alpha(\underline{x})}$$

$$\alpha(\underline{x}) \overset{def}{\equiv} \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu(\delta, \underline{x})}{\ln \delta} \qquad \text{Esponente di Hölder}$$

Se α dipende da $\underline{x}$ $\Rightarrow$ FRATTALE NON UNIFORME

– Mappa LOGISTICA –

Per la MAPPA LOGISTICA si è calcolato che

$$\mu(I_\delta(x)) \begin{cases} \sim \delta & \forall x \neq 0 \text{ e } 1 \quad \boxed{\alpha = 1} \\ \sim \sqrt{\delta} & x = 0 \text{ e } 1 \quad \boxed{\alpha = 1/2} \end{cases}$$

NON è un FRATTALE UNIFORME

— SPETTRO DELLE DIMENSIONI $D(q)$ —

Hp) i) INSIEME $S \subset \mathbb{R}^N$

ii) COPERTO da CUBI DI LATO δ

iii) $N(\delta)$ NUMERO di CUBI NECESSARI a COPRIRE L'ATTRATTORE

F_1) La DIMENSIONE di SCATOLA D_0

$$D_0 = - \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}$$

NON ci dà alcuna INFORMAZIONE sulla STRUTTURA FINE, se alcune scatole sono visitate di più, o meno!

F_2) $\alpha(x)$ la DIM PUNTUALE ci dà una CARATTERIZZAZIONE eccessiva

Serve una MEDIA OPPORTUNA degli $\alpha(x)$ per caratterizzare l'attrattore

$$\begin{cases} D(q) = \dfrac{1}{q-1} \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\ln I(q,\delta)}{\ln \delta} \\ I(q,\delta) = \sum\limits_{i=1}^{N(\delta)} P_i^q(\delta) \end{cases}$$

DIM. GENERALIZZATA DI RENYI

$q = 0$ Si ricava la definizione della $D(0)$

$q > 0$ Ovvero i cubi con P_i più grandi contano di più per la dimensione.

FRATTALE UNIFORME

Hp) la dim. particolare $\alpha(\underline{x})$ NON dipende da $\underline{x}$

$$\Downarrow$$

1) $P_i = \mu_i = \delta^{\alpha}$ = COSTANTE

2) $\sum_i^{N(\delta)} P_i = 1 \Rightarrow P_i = \frac{1}{N(\delta)}$

$$\Downarrow$$

$$D(q) = \frac{1}{q-1} \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \sum_i P_i^q}{\ln \delta}$$

$$\sum_i P_i^q = \sum_i^N \frac{1}{N^q} = \frac{1}{N^{q-1}}$$

$$\ln \sum_i P_i^q = -(q-1) \ln N(\delta)$$

$$D(q) = - \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta} \equiv D(0) \quad \forall q$$

$$\boxed{\text{Se } D(q) = D(0) \ \forall q \quad \text{FRATTALE UNIFORME}}$$

Def. MULTIFRATTALE

SE $D(q)$ VARIA CON q
SI HA UN MULTIFRATTALE

In genere vale

$$D(0) \geq D(1) \geq D(2) \geq \dots$$

Le 2 DIMENSIONI più NOTE e MISURATE

* $D(1)$ DIM. d'INFORMAZIONE
* $D(2)$ DIM. di CORRELAZIONE

DIMENSIONE d'INFORMAZIONE

$$D(1) = \lim_{q \to 1} D_q = - \lim_{\delta \to 0} \frac{\mathring{I}(\delta)}{\ln \delta}$$

$$\begin{cases} I(\delta) = - \sum_i P_i(\delta) \ln P_i(\delta) \\ \text{INFORMAZIONE di SHANNON} \end{cases}$$

$I(\delta)$ è l'INFORMAZIONE CONTENUTA nella MISURA dei CUBI VISITATI

$$\boxed{D(1) = D_{KY}}$$

DIMENSIONE di CORRELAZIONE -

[LA DIMOSTRAZIONE DOPO È MIGLIORE]

$$\begin{cases} D_2 = \lim_{r \to 0} \dfrac{\ln I(2,r)}{\ln r} \\ I(2,r) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N(r)} p_i^2 \end{cases}$$

Dalla definizione della funzione di correlazione per il punto:

$$C(r) = \lim \frac{2}{\cancel{M}\, M(M-1)} \sum_{i>j}^{M} \Theta\left(r - |\underline{x}_i - \underline{x}_j|\right)$$

Se considero il cubo centrato $B(r, \underline{x}_i)$ in $\underline{x}_i$ di raggio r avrò che:

$$\begin{cases} p_i(r) = \dfrac{1}{M} \displaystyle\sum_{j=1}^{M} \Theta\left(r - |\underline{x}_i - \underline{x}_j|\right) \\ \text{per } M \to \infty . \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$C(r) \propto \lim_{M \to \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p_i(r) = \langle p \rangle$$

Se $\underline{x}_i$ è nel cubo $B(r, \underline{x}_i)$ avremo che:

$$\overline{A} = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} A(x_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N(r)} p_j(r) A(x_j)$$

e quindi

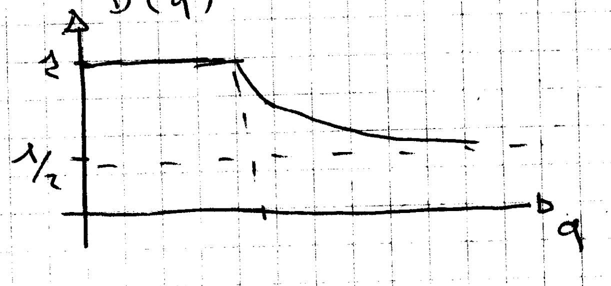
$$C(r) \sim \sum_{j=1}^{N(r)} p_j^2(r) = I(2,r)$$

— o —

Mappa LOGISTICA

Si può mostrare che

$$D(q) = \begin{cases} 1 & q \leq 2 \\ \dfrac{q}{2(q-1)} & q \geq 2 \end{cases}$$



$$\lim_{q \to \infty} D(q) = 1/2$$ DIMENSIONE MINIMA puntuale

$q \to \infty$

sono FAVORITI i CONTRIBUTI più GRANDI del tipo

$$p_i \sim r^{\alpha_i}$$

e quindi quelli con più piccoli α_i

$$\Downarrow$$

$$\lim_{q \to \infty} D(q) = \min_i \{\alpha_i\}$$

DIM. CORRELAZIONE ⌊ 2^{a} DIMOSTRAZIONE ⌉

$$D(q) = \frac{1}{q-1} \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \sum_i p_i^q}{\ln \delta}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle p^{q-1} \rangle = \sum_i p_i \left(p_i^{q-1}\right) \simeq \delta^{(q-1)D(q)}$$

⌊ $q = 2$ ⌉ $\langle p \rangle \sim \delta^{D(2)}$

Ma avevamo mostrato che:

$$C(\delta) \sim \langle p \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$C(\delta) \sim \delta^{D(2)}$$

e quindi

$$D(2) = \lim_{\delta \to 0} \frac{d \ln C(\delta)}{d \ln \delta}$$