DIMENSIONE di CORRELAZIONE
METODO di GRASSBERGER - PROCACCIA

È un METODO (PRATICO) di CALCOLO della DIM. FRATTALE che fa uso della STRUTTURA PROBABILISTICA dell'ATTRATTORE, cioè

$D(0)$ → ti dice solo se in una SCATOLA c'è un punto o meno! PROPRIETÀ GEOMETRICHE dell'ATTRATTORE

MISURA di LEBESGUE

$D(2)$ → È legata a quanti punti cadono in ogni scatola, a quanto tempo un'orbita passa in una scatola rispetto ad un'altra.

MISURA NATURALE

⇓

STRUTTURA PROBABILISTICA dell'ATTRATTORE

*

MISURA INVARIANTE o NATURALE

Hp) Scelgo a N pti a caso su un attrattore, distribuiti secondo la MISURA NATURALE

⇓?

Conto il num. di coppie $C(\delta)$ la cui distanza è MINORE di δ

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i>j}^{N} H\left(r - |\underline{x}_i - \underline{x}_j|\right)$$

$$H(y) = \begin{cases} 1 & \forall y > 0 \\ 0 & \forall y < 0 \end{cases}$$ F. di HEAVISIDE

Si nota che se $N_i(r)$ è la frazione di punti a distanza r dal punto $\underline{x}_i$:

$$N_i(r) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \Theta\left(r - |\underline{x}_i - \underline{x}_j|\right)$$

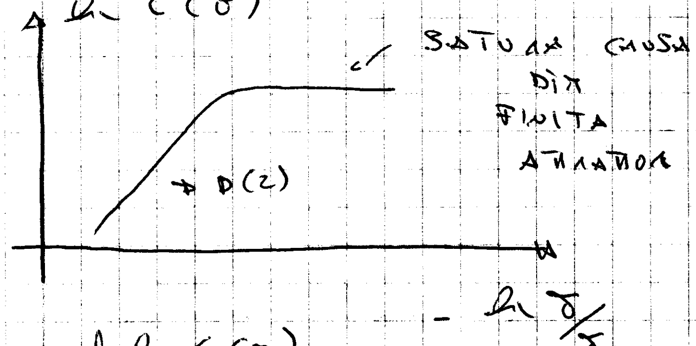
allora la doppia sommatoria in $C(r)$ si dice che

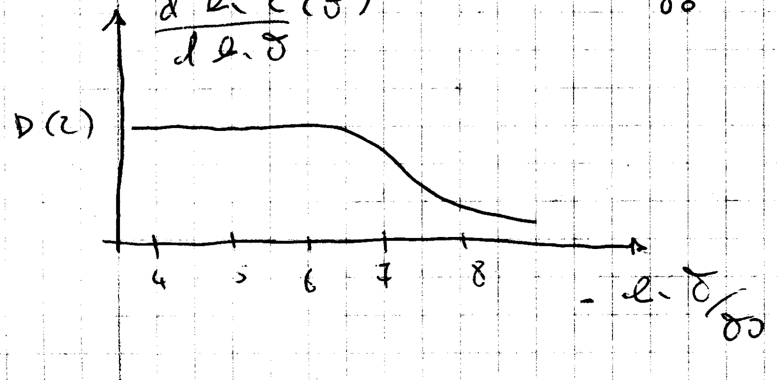
$$C(r) \equiv \langle N_r \rangle \sim r^{D(2)}$$

È quindi DIM. CORRELAZIONE O GP

$$D(2) = \lim_{r \to 0} \frac{d \ln C(r)}{d \ln r}$$

$\frac{d}{d\ln} \rightarrow$ DERIVATA LOGARITMICA di $\ln C(r)$





$\langle N_r \rangle$ = probabilità di cadere nell'intervallo r

1) $D=1$ linea retta con questo riferimento $N \propto r$

2) $D=2$ Piano questo riferimento $N \propto r^2$

⋮

In genere:

$$D(2) < D(0)$$

IMPLEMENTAZIONE PRATICA da DATI SPERIMENTALI / EMBEDDING OTTIMALE

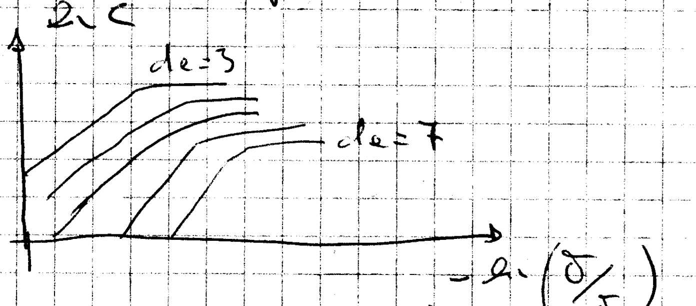
Dati sperimentali $\{u(t)\}$

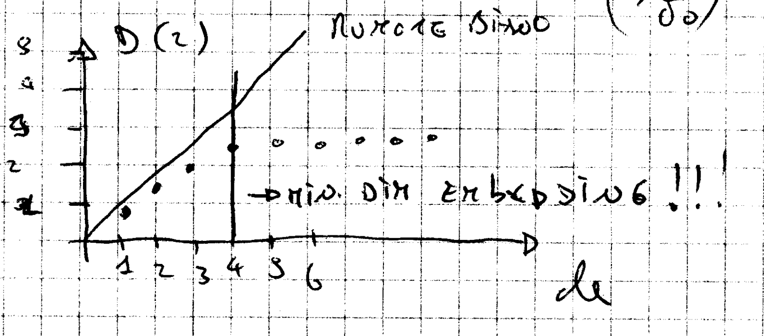
1) Ricostruire per dim embedding crescenti i vettori ritardati

$$\{ y_1(t), y_2(t), \quad y_{d_E}(t) \}$$

finchè τ OTTIMALE (vedi dopo)

2) Si calcola per ogni d_E la corrispondente $C(\delta)$ e l'esponente $D(2)$





"RISOLUZIONI OTTIMALI"

– δ piccolo –

grandi fluttuazioni a causa della bassa statistica!

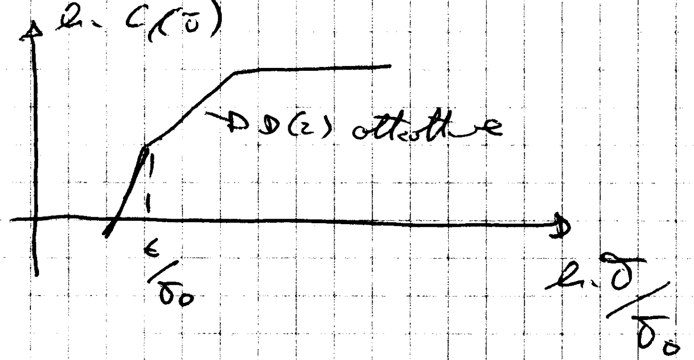
– $\delta \to \delta_0$ –

Si vedono saturazioni in ln C perchè raggiungo i BORDI dell'ATTRATTORE

[EFFETTO del RUMORE]

Il rumore è sempre presente nei dati sperimentali!

Per valutare l'effetto aggiungo rumore di ampiezza ϵ/σ_0 al segnale!



Al di sotto della soglia ϵ/σ_0 la pendenza cambia a causa del rumore

$$D(2) = d_e$$

Il rumore riempie UNIFORMEMENTE lo SPAZIO di EMBEDDING!!

—.—

NON SI RIESCONO a STIMARE
$D_F > 6-7$
a causa della enorme quantità di dati necessaria a riempire in modo ottimale lo sp. delle fasi

$$\frac{N_R}{N_{OT}} \sim \delta^{D_F} \quad !!!$$

[MISURE INVARIANTI]

Se A era parte dell'attrattore

MISURA NATURALE $\mu(A) = \lim_{T \to \infty} \frac{t(A)}{T}$

TEMPO PASSATO IN A

TEMPO TOTALE della MISURA

$\mu(A)$ è la PROBABILITÀ che PRENDENDO a CASO un PUNTO sull'ATTRATTORE, questo cada in A

MISURA INVARIANTE di PROBABILITÀ $d\mu$

$$\mu(A) = \int_A d\mu(\underline{x})$$

Il carattere invariante per una MAPPA F è dato da

$$\mu\left[F^{-n}(A)\right] = \mu(A) \qquad n > 0$$

ove $F^{-n}(A)$ è la n-esima pre-immagine di A.

- ATTENZIONE - DENSITÀ NATURALE INVARIANTE ρ

Se $\rho(\underline{x})$ è una BUONA FUNZIONE posso scrivere

$$d\mu = \rho(\underline{x})\, d\underline{x}$$

ma in generale ρ ha DISCONTINUITÀ, ma

$\mu_i = \int \rho\, dx$ le POSSO SEMPRE DEFINIRE
INTERVALLO i

OSS.

La RETRO-IMMAGINE è definibile anche per MAPPE F NON INVERTIBILI

$\Downarrow$

Se è INVERTIBILE posso SCRIVERE

$$\mu\left[F^{n}(A)\right] = \mu(A) \quad n > 0$$

Def. FORMULE di MISURA INVARIANTE

FLUSSO $\quad \mu_{\underline{x}_0}(d\underline{x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \delta(\underline{x} - \underset{\overset{\parallel}{U_t(\underline{x}_0)}}{\underline{x}(t)})\, d\underline{x}$

$\underline{x}(t)$ orbita al tempo t, di un'orbita che al tempo 0 era in $\underline{x}_0$

$$U_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t)$$

$\sim$

MAPPA

$$\mu_{x_0}(d\underline{x}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta(\underline{x} - \underline{F}^j(\underline{x}_0))\, dx$$

$\underline{F}^j(\underline{x}_0)$ è l'iterata j della COND. INIZIALE $\underline{x}_0$

$\Downarrow$

Se $\mu_{\underline{x}_0}(S)$ è la STESSA $\forall\, \underline{x}_0 \in$ BACINO d'ATTRAZIONE, eccetto per un INSIEME di MISURA NULLA, allora

$$\mu(S) = \mu_{\underline{x}_0}(S)$$

è la MISURA NATURALE di S

— o —

Si possono definire molte MIS. INVARIANTI, ma non tutte hanno rilevanza fisica — Ad. es. le ORBITE INSTABILI immerse nell'ATTRATTORE sono INVARIANTI, potrei definire MIS. INVARIANTI a piacere dando pesi diversi alle diverse orbite, ma queste MISURE NON sono OSSERVABILI riguardo la DINAMICA NATURALE del SISTEMA –

" Misura di Mappe 1 D – $y = M(y)$

– Operatore di FROBENIUS - PERRON –

Hp) Date ∞ cond. iniziali sull'asse x distribuite con densità iniziale $\rho_0(x)$: $\int_0^1 \rho_0(x)\, dx = 1$

$\Downarrow$

Applico la mappa M ad ogni C.I e genero una NUOVA DENSITÀ

$$\rho_1(x)$$

e così via in generale vale

$$\begin{cases} \rho_{n+1}(x) = \int \rho_n(y)\, \delta\left[x - M(y)\right] dy \\ \text{Eq. FROBENIUS - PERRON} \end{cases}$$

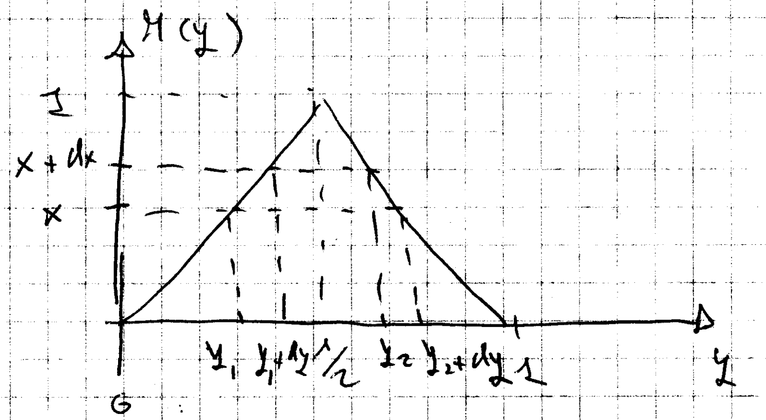
La DENSITÀ NATURALE INVARIANTE deve soddisfare a

$$\rho_{n+1}(x) = \rho_n(x) = \rho(x)$$

e quindi deve essere soluzione di

$$\rho(x) = \int \rho(y)\,\delta[x - r(y)]\,dy$$

Mappa a Tenda



Il numero di punti in $(x, x+dx)$ al tempo $n+1$ è dato dalla somma dei punti in (y_1, y_1+dy_1) e (y_2, y_2+dy_2) al tempo n

$$\Downarrow$$

$$\rho_{n+1}(x)\,dx = \rho_n(y_1)\,dy_1 + \rho_n(y_2)\,dy_2$$

$$\rho_{n+1}(x) = \rho_n(y_1)\left|\frac{dx}{dy_1}\right|^{-1} + \rho_n(y_2)\left|\frac{dx}{dy_2}\right|^{-1}$$

Per la mappa a tenda $\begin{cases} y_1 = x/2 \\ y_2 = 1 - x/2 \end{cases}$

$$\left|\frac{dx}{dy_1}\right| = \left|\frac{dx}{dy_2}\right| = 2$$

$$\rho_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\,\rho_n\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\rho_n\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

La soluzione stazionaria è data da

$$\rho_{n+1} = \rho_n = \rho = 1 \quad \forall x$$

[Mappa LOGISTICA ALLA CRISI]

$$x_{n+1} = 4 x_n (1 - x_n) \qquad x_n \in [0, 1]$$

Se definisco y nell'intervallo $[0;1]$ tramite la trasformazione

$$x = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\pi y)\right]$$

$\Downarrow$

Ottengo la mappa a TENDA per y di cui so che

$$\rho(y) = 1$$

$\Downarrow$

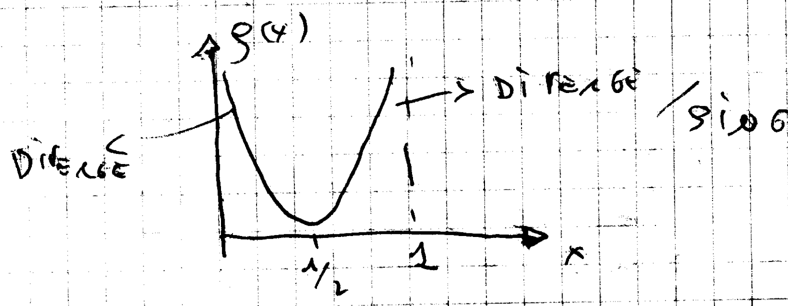
Vado calcolare $\rho(x)$ per la LOGISTICA con la relazione

$$\rho(x)\, dx = \rho(y)\, dy$$

Si nota che

$$dx/dy = \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \pi \sqrt{x(1-x)}$$

$$\rho(x) = \left|\frac{dy}{dx}\right| \rho(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$



Misura Naturale - Nota -

La misura naturale di un intervallo $I_\epsilon(\bar{x})$ ci dice la frazione di tempo che un'orbita "tipica" spende in tale intervallo:

$$\mu\left(I_\epsilon(\bar{x})\right) = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \rho(x)\, dx$$

Hp) Se ρ è

i) liscia in $I_\epsilon(\bar{x})$

ii) limitata

$$\Downarrow$$

$$\mu(I_\epsilon) \propto \epsilon$$

Voglio capire l'origine delle singolarità in ρ per logistica alla crisi!

$\lfloor x = 1/2 \rceil$

ρ è liscia e limitata

$$\Downarrow \quad \mu\left(I_\epsilon\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \propto \epsilon$$

$$\left[\tfrac{1}{2} - \epsilon, \tfrac{1}{2} + \epsilon\right] \longrightarrow \left[1 - 4\epsilon^2, 1\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\left(I_\epsilon(1/2)\right) = \mu\left(I_{4\epsilon^2}(1)\right) \propto \epsilon$$

dato che $\rho = 0$ per $x > 1$

E perciò

$$\mu\left[I_\epsilon(1)\right] \propto \sqrt{\epsilon}$$

E dato che

$$\mu = \int \rho \, dx$$

ne segue che

$$\rho(x \sim 1) \propto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

OSS.

$$\int_{1-\epsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1-x}\Big|_{1-\epsilon}^{1} = +2\sqrt{\epsilon}$$

CVD

— o —

Se applico ancora la mappa

$$F(1) = 0$$

e perciò

$$\mu(I_\epsilon(0)) \propto \sqrt{\epsilon}$$

e però lì avremo $\rho(x) \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$

— o —

Le SINGOLARITÀ in ρ sono DOVUTE ad ITERATE di PUNTI CRITICI

ove $F' = 0$

— o —

Questo si capisce dall'applicazione di F.P.

$$\rho_{n+1}(1) = \rho_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\left|\frac{dx}{dy}\right|^{-1}$$

SE i) $\frac{dx}{dy} = 0$

ii) $g_n(1/2)$ NON DIVERGE ed è LISCIA

$\Downarrow$

$g(1) \to \infty$!!

$r = 4$

In questo caso

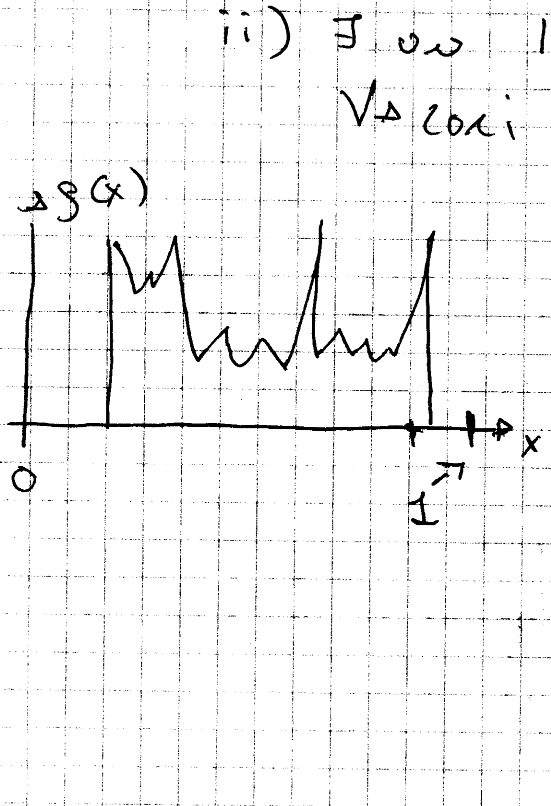
$$\tfrac{1}{2} \to 1 \to 0 \circlearrowleft$$

$3.57 < r < 4$

Le ITERATE del MASSIMO sono DENSE nell'INTERVALLO ATTRATTIVO!

i) g è DISCONTINUO OVUNQUE

ii) $\exists$ un INSIEME DENSO di VALORI di x ove g è ∞



INSIEME DENSO

$\exists$ $\emptyset$ non DENSI nei $\mathbb{R}$ (è $\mathbb{N}$ no)

— o —

Un INSIEME A è DENSO in X, se la CHIUSURA di A è X

— . —

Cioè ogni pto di X è pto d'accumulazione per i punti di A

Anche se ρ NON può essere DEFINITA
la MISURA è SEMPRE DEFINIBILE

$$\begin{cases} d\mu = \rho \, dx \\ d\mu_I = \int_I \rho \, dx \end{cases}$$

- CANTOR -

ρ NON è DEFINITA per un
INSIEME di CANTOR,
ma μ sì, può anche essere $\neq 0$ o no!