# Dimensione frattale

Qual è la DIMENSIONE dell'INSIEME di CANTOR ?

- È un sottoinsieme dell'intervallo [0, 1] ma $\mu_{LEBESGUE} = 0$
- È un insieme chiuso fatto di punti NON ISOLATI (quindi è in parole povere continuo)
- Sono messe in corrispondenza ~~biunivoca~~
  Ins. CANTOR $\longleftrightarrow$ INTERVALLO [0, 1]

Confronto con i [RAZIONALI]

- I $\mathbb{Q}$ sono una UNIONE NUMERABILE di PUNTI ISOLATI

$\Downarrow$ posso trovare una copertura numerabile

$$\mu\left(\cup A_i\right) = \sum_i \mu\left(A_i\right)$$

$\mu(A_i) = 0$ pto isolato

$\Downarrow$

$$\mu_{LEBESGUE}(\mathbb{Q}) = 0$$

[ FAT FRACTALS ]

Esistono Ins. di CANTOR con MISURA di LEBESGUE POSITIVA e son detti FAT FRACTALS

Def. DIMENSIONE TOPOLOGICA $D_T$

$D_T$ di un insieme B è pari ad E, se B è OMEOMORFO a $\mathbb{R}^E$!

— ∘ —

Cioè se ∃ una CORRISPONDENZA BIIETTIVA e BICONTINUA fra i punti di B ed $\mathbb{R}^E$

— ∘ —

DIM TOPOLOGICA dell'INS. CANTOR!

La corrispondenza fra INS. CANTOR e $[0,1]$ la abbiamo già scritta

$$\begin{cases} f : C \to [0,1] \\ f\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} 2^{-k} \end{cases}$$

$C = \left\{ \text{INS di NUM SCRIVIBILI come } \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \quad a_k \in \{0,2\} \right\}$

f è SURIETTIVA

$\forall y \in [0,1]$ ∃ almeno $x \in C$ : $f(x)=y$

~

Es. basta prendere un num binario

$$\underset{\text{Base } 2}{y = 0.10110} \xrightarrow{1 \to 2} \underset{\text{Base } 3}{x = 0.20220}$$

f NON è INIETTIVA –

SE $x_1 \neq x_2$ può accadere che $f(x_1) = f(x_2)$

Troviamo i 2 pti

$$\begin{cases} x_1 = 7/9 = 0.20222\ldots_3 \\ x_2 = 8/9 = 0.220000\ldots_3 \end{cases}$$

$\left[7/9 \,;\, 8/9\right]$ estremi di un INTERVALLO dell'INS. di CANTOR

$$f(x_1) = 0.101111 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

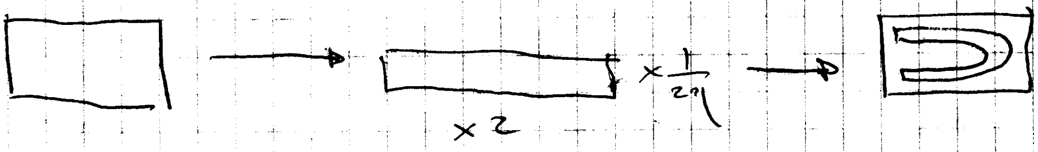
$$f(x_2) = 0.11000 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1 \qquad \text{C.V.D}$$

— · —

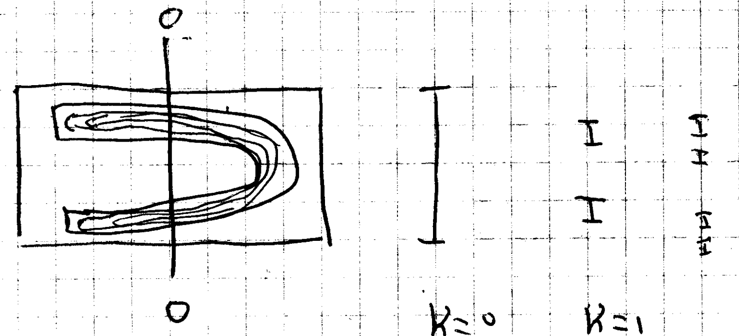
Allora $D_T(C) \equiv 0$

Dim Topologica della Mappa di Smale o Ferro di Cavallo




$x \to$ VARIETÀ INSTABILE $\lambda_1 = \ln 2$

$y \to$ " STABILE $\lambda_2 = -\ln(2\eta)$ $\eta > 1$




Lungo asse Y è Tipo INS. di CANTOR

Lungo asse $x \Rightarrow D_T = 0$ (Tipo Cantor)

Lungo asse $y \Rightarrow$ È LISCIA la parte relativa in $D_T = 1$ cioè applicazione biunivoca con R

$$D_T = 1$$

Ma applicando la relazione di Kaplan-Yorke avevo trovato

$$D_{KY} = D(1) = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} = 1 + \frac{\ln 2}{|\ln 2\eta|}$$

$$= 1 + \frac{\ln 2}{\ln 2 + \ln \eta} < 2$$

$$\boxed{D_{KY} > D_T}$$

• Vi sono altre dimensioni "frattali"

[ Def. BOX COUNTING $D(0)$ ]

Hp) A INS. COMPATTO in uno SPAZIO EUCLIDEO di DIM. E

$\rightsquigarrow$

Si ricopre A con SCATOLE di lato $\delta$ e si conta il numero $N(\delta)$ di tali scatole non vuote

$0 \leq \delta \leq 1$

$$D(0) = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \inf N(\delta)}{\ln \delta}$$

INF → Va presa la copertura con MENO SCATOLE possibili che coprono A e NON si SOVRAPPONGANO

~

Di solito si usa una GRIGLIA REGOLARE di SCATOLE nell'ATTRATTORE

$\ulcorner$ $D(0)$ dell'ins. di CANTOR $\urcorner$

Nel caso di Cantor si può ricoprire $\forall n > 1$ l'insieme con $2^N$ intervalli di lunghezza

$$\delta = \epsilon_n = \left(\frac{1}{3}\right)^N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

$$\Downarrow$$

$$D(0) = \lim_{N\to\infty} \frac{\ln 2^N}{\ln 3^N} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63\ldots$$

$$D(0) > D_T$$

Secondo MANDELBROT questa è la DEFINIZIONE di OGGETTO FRATTALE

$D(0)$ della Mappa di SMALE

Lungo l'asse $Y$ i segmenti ad ogni iterazione sono

$k=1$ 1 segmento di lunghezza $A$

$k=2$ 2 segmenti di lunghezza $A/(2\gamma)$

$k=3$ 4 " " " $\frac{A}{(2\gamma)^2}$

$k$ $2^{k-1}$ " " " $\frac{A}{(2\gamma)^{k-1}}$

$\Downarrow$ $A = 1$ LATO della SCATOLA $\delta = \frac{1}{(2\gamma)^{k-1}}$

$$D(0)_Y = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln 2^{k-1}}{\ln (2\gamma)^{k-1}} = \frac{\ln (2)}{\ln (2\gamma)}$$

$$D(0) = 1 + \frac{\ln 2}{\ln (2\gamma)} = D_k > D_T$$

# DIM FRATTALI e SISTEMI DINAMICI

La dimensione frattale di un attrattore strano ci dà il NUMERO di GRADI di LIBERTÀ ATTIVAMENTE coinvolti nella DINAMICA del sistema $N_f$ –

PUNTO FISSO $\Rightarrow$ $N_f = 0$ $\quad d = 0$

CICLO LIMITE $\Rightarrow$ $N_f = 1$ $\quad d = 1$

MOTO QUASI-PERIODICO $\Rightarrow$ $N_k$ $\quad$ (TORO $T^k$) $\quad d = k$

ATTRATTORE FRATTALE

$$N_f \geq [D_F] + 1$$

LIMITE INFERIORE al NUMERO di GRADI di LIBERTÀ ATTIVI

L'approccio Sperimentale

IL METODO di TAKENS (EMBEDDING)

Di solito in un esperimento NON si riesce a misurare tutte le componenti del vettore $\underline{x}(t)$ che definisce lo stato del sistema, ma di solito solo una VARIABILE SCALARE funzione di $\underline{x}(t)$, cioè

SEGNALE $g(t) = G[\underline{x}(t)]$

Come si fa a comprendere la dinamica del sistema, avendo solo il segnale $g(t)$?

– METODO di TAKENS –

Si costruiscono allora le VARIABILI RITARDATE

$$\begin{cases} y_1(t) = g(t) \\ y_2(t) = g(t-\tau) \\ y_3(t) = g(t-2\tau) \\ \vdots \\ y_M(t) = g(t-(M-1)\tau) \end{cases}$$

$\tau$ RITARDO "Tipico"

Ora possiamo scrivere formalmente

$$\underline{y} = \underline{H}(\underline{x}) \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^d \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^M$$

Diciamo che $\underline{H}$ è una IMMERSIONE (embedding) dello spazio $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ nello spazio di $\underline{y} \in \mathbb{R}^M$

1) Se $\forall\, \underline{x} \neq \underline{x}' \Rightarrow \underline{H}(\underline{x}') \neq \underline{H}(\underline{x})$ e viceversa

2) Se $H$ è ADATTAMENTE DIFFERENZIABILE

Avremo allora una FEDELE RICOSTRUZIONE dell'insieme originale, se i punti di esso sono in CORRISPONDENZA BIUNIVOCA con l'INSIEME RICOSTRUITO.

⌈ ESEMPIO ⌋

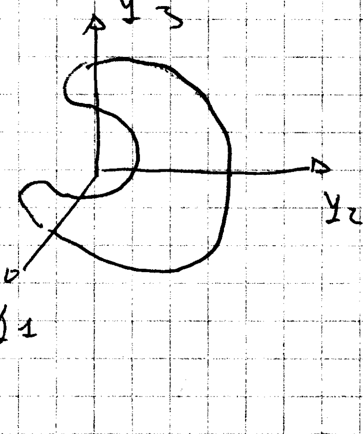
Se nostro sistema dinamico è regolato dall'equazione

$$\dot{x} = \omega \qquad x \in [0, 2\pi]$$

x è un OSCILLATORE PERIODICO, la dinamica giace su un CICLO LIMITE (curva chiusa)

Supponiamo di avere un EMBEDDING 3-d

$$\begin{cases} \underline{y} = \left[G(x(t)),\ G(x(t-\tau)),\ G(x(t-2\tau))\right] \\ G(x) \text{ è periodica di periodo } 2\pi \text{ in } x \end{cases}$$

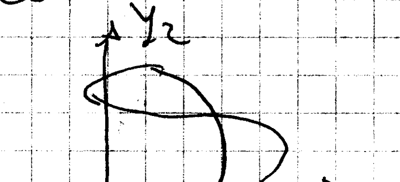



OTTENGO una CURVA CHIUSA

$\Downarrow$ senza INTERSEZIONI

BUONA RICOSTRUZIONE

Se uso un EMBEDDING in 2-d può accadere che




LA CURVA SI INTERSECA

la RICOSTRUZIONE NON è più BIUNIVOCA $\Leftarrow$ 2 valori di x mi danno lo stesso $\underline{y}$

La DINAMICA originale è DETERMINISTICA, le orbite non possono intersecarsi

⇓

BUONA RICOSTRUZIONE per

$\lfloor d_E > 2 \rceil$

– TEOREMA di TAKENS – (1980)

Quale è la dim. di embedding $d_E$ MINIMA per avere una fedele ricostruzione di un attrattore di dimensione $d_F$?

Takens ha mostrato che in genere

x ESSERE SICURI $d_E \geq 2d_F + 1$

è ~~sufficiente~~ GARANTISCE ad avere un buon embedding –

Ma la $d_E$ MINIMA sta fra $d_F$ e $2d_F+1$!

⇓

⌈ Una STIMA CORRETTA di un SISTEMA DISSIPATIVO che genera un ATTRATTORE con DIM. FRATTALE $d_F$ si ottiene già con

$$d_E = [d_F] \quad o \quad d_E = [d_F] + 1$$ ⌋

NOTA –

In uno spazio a dimensione $N$ l'intersezione di 2 superfici di dimensione $d_1$ e $d_2$ è di dimensione

$$d_0 = d_1 + d_2 - N$$

Se $d_0 < 0$ NON AVREMO INTERSEZIONI:

Quindi posto $N = d_E$

$$d_E > d_1 + d_2$$

per non avere intersezioni!..

— o —

FALLO DOPO LA DIM GP

## SCELTA del RITARDO $\tau$

Supponiamo di voler ricostruire l'attrattore originale di dimensione $d_F$ in uno spazio di EMBEDDING $d_E$ - E vogliamo $d_E$ minimo per tale ricostruzione, per noi scelte numeriche, al crescere di $d_E$ ho bisogno di più punti (traiettorie più lunghe) per visitare bene lo spazio delle fasi.

$d_E$ TROPPO piccolo $\Rightarrow$ MACCHIA di PUNTI nello Sp. RICOSTRUITO

per $d_E$ OTTIMALE $\Rightarrow$ inizio a vedere la struttura frattale dell'attrattore

~

Ma anche $\tau$ gioca un RUOLO IMPORTANTE a parità di punti $N$ sull'attrattore:

$\tau$ TROPPO piccolo

Sebbene i dati siano caotici hanno sempre un tempo di correlazione, se $\tau$ è troppo piccolo i dati rimangono correlati

$\Downarrow$

La DIM FRATTALE viene SOTTOSTIMATA

## $\tau$ TROPPO GRANDE

A causa del errore sperimentale per $\tau$ è troppo grande $x(t+\tau)$ perde quasi del tutto memoria del segnale precedente $x(t)$

$\Downarrow$

È come avere dati RANDOM, privi della nessuna struttura, e si riempie tutto lo spazio di embedding → DIM FRATTALE SOVRASTIMATA

$\Downarrow$

Sono costretto ad aumentare molto la RISOLUZIONE (il numero di pti è piccolo) per accorgermi della struttura dell'attrattore

$\Downarrow$

## SCELTA OTTIMALE di $\tau$


$\tau$ BUONA SCELTA

$C(t)$ f. di AUTOCORRELAZIONE di $x(t)$