2 LEZIONE 22/12

- SIC def. OPERATIVA / MAPPE p 4
- ATTRATTORE di SMALE / VARIETÀ STABILI / INSTABILI p 5

MAPPE
- Esp. Lyapunov MAPPE 1D / ORDINE DEI LIMITI
- SPAZIO TANGENTE / PERTURBAZIONE INFINITESIMA + CHAIN RULE / Esp. MASSIMO Lyapunov
- TEOREMA ERGODICO
  MEDIA nel TEMPO = MEDIA SULLE C.I
- RAPIDO CENNO MISURA INVARIANTE / SI RIPRENDE DOPO
- MAPPA A TENDA λ_1
- MAPPA del FORNAIO / SPETTRO di Esp. di Lyapunov
- • SISTEMA DISSIPATIVO det |DF| < 1
  p 7/8
  • DIMENSIONE dell'ATTRATTORE Kaplan-Yorke

FIN QUA

---

3 **LEZIONE 09/01**

- MAPPE A M DIMENSIONI p 9/10
- SPETTRO di ESPONENTI Lyapunov → ESEMPIO → TEO. OSELEDEC
- Kaplan-Yorke
- CENNO TEO OSELEDEC
- CARATTERIZZAZIONE DEGLI ATTRATTORI REGOLARI CON ESP. Lyapunov

SPETTRO di Lyapunov SISTEMI CONSERVATIVI

I VOLUMI SI CONSERVANO

SISTEMA CONTINUO

$$\langle \underline{\nabla} \cdot \underline{F} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 0 \qquad \left(\begin{matrix} \text{DISSIPATIVO} \\ < 0 \end{matrix} \right)$$

SISTEMA DISCRETO

$$\langle \| \det |DF| \| \rangle = e^{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i} = 1 \qquad (< 1 \text{ DISSIPATIVO})$$

~ . ~

SISTEMI HAMILTONIANI

Gli esponenti di Lyapunov appaiono a coppie

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq -\lambda_n \geq \dots \geq -\lambda_2 \geq -\lambda_1 \\ \lambda_n = 0 \quad \text{FLUSSO CONTINUO AUTONOMO} \end{cases}$$

~ . ~

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{F}(x)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = p_i \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$\underline{\dot{x}} = Q \cdot \underline{\nabla} \underline{H}$$

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q)$$

– DINAMICA HAMILTONIANA –

SISTEMI HAMILTONIANI → MECCANICA CELESTE
→ DINAMICA DEI FLUIDI
→ FISICA DEL PLASMA

Le variabili che descrivono un SISTEMA HAMILTONIANO di N dimensioni sono:

$$\begin{cases} q = (q_1, q_2 \dots q_N) \\ p = (p_1, p_2, \dots p_N) \end{cases}$$ VARIABILI CANONICHE

L'evoluzione temporale delle variabili canoniche è data dalla Hamiltoniana $H(q, p, t)$ tramite

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \partial H / \partial p_i \\ \dot{p}_i = - \dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$ Eq. Hamilton

– NOTAZIONE SIMPLETTICA –

$$\underline{x} = (q, p) \quad \begin{cases} x_i = q_i \\ x_{i+N} = p_i \end{cases}$$

Le eq. di Hamilton si possono riscrivere come

MATR. JACOBIANA

$$\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{\mathbb{J}} \times \underline{\nabla}_x H = \left(\sum_{j=1}^{2N} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right)$$

$$\underline{\nabla}_x H = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} H \\ \partial_{x_2} H \\ \vdots \\ \partial_{x_{2N}} H \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} O_N & \mathbb{I}_N \\ -\mathbb{I}_N & O_N \end{pmatrix}$$

SISTEMI DINAMICI

Eq. FLUSSO

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{F} = \mathbb{J} \times \underline{\nabla}_x H$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{F} = 0$$

SISTEMA CONSERVATIVO SECONDO LIOUVILLE

Calcolino

$$\underline{\nabla} \circ \underline{F} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial p_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0$$

MAT. HESSIANA è SIMMETRICA

JACOBIANA

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} & \frac{\partial F_1}{\partial y_i} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_i} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

HESSIANA

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x_i^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

– STRUTTURA SIMPLETTICA e TRASFORMAZIONI CANONICHE –

Cerchiamo una trasformazione di variabili

$$\begin{cases} \underline{x} = (q, p) \longrightarrow \underline{X} = (\underline{Q}, \underline{P}) \\ \underline{X} = X(\underline{x}) \end{cases}$$

tale che preservi la STRUTTURA HAMILTONIANA cioè per cui valga

$$\begin{cases} \frac{d\underline{X}}{dt} = J \, \underline{\nabla}_X H' \\ H' = H(\underline{x}(\underline{X})) \end{cases}$$

questa è detta TRASFORMAZIONE CANONICA!

~~

Dato $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ MAT. JACOBIANA

si ha dalla CHAIN RULE:

$$\frac{d\underline{X}}{dt} = \frac{d\underline{X}}{d\underline{x}} \frac{dx}{dt} = M \frac{dx}{dt} = M \hat{J} \, \underline{\nabla}_x H =$$

$$= M \mathbb{J} \times \underline{\nabla}_x H = M \mathbb{J} \underline{\nabla}_x H' M =$$

$$= \left(M \mathbb{J} M^t \right) \underline{\nabla}_x H'$$

$\Updownarrow$ La trasf. è canonica

$\boxed{\underline{\text{Se}} \text{ e } \underline{\text{Solo Se}}}$ M è SIMPLETTICA

$$\left[M \mathbb{J} M^t = \mathbb{J} \right]$$

$\Downarrow$

Le MATRICI SIMPLETTICHE formano un Gruppo:

1) $\mathbb{1} \in MS$
2) $M^{-1} \; \exists$ ed $M^{-1} \in MS$
3) Se $M, N \in MS \Rightarrow M \cdot N \in MS$
(PRODOTTO DI MAT. SIMPLETTICHE è SIMPLETTICO)

Proprietà delle MAT. SIMPLETTICHE

P1) $|\det M| = 1$

$$\det(MJM^t) = (\det M)^2 \det J = \det J$$

$\Downarrow$

$$(\det M)^2 = 1 \Rightarrow |\det M| = 1$$

Si può mostrare che $\det M = +1$

$\Updownarrow$ M è la MAT. JACOBIANA

Le trasf. canoniche preservano VOLUMI nello Sp. delle FASI

Proprietà dei DETERMINANTI

- $\det B = \det B^t$
- $\det(BC) = \det B \det C$
- $\det(B^{-1}) = \dfrac{1}{\det B}$
- $\det(N^{-1} B N) = \det B$

Def. Gruppo

Un Gruppo è un insieme, G, su cui è def. una operazione $\cdot$

CHIUSURA

$\forall a, b \in G$

$\Downarrow$

$a \cdot b \in G$

ASSOCIATIVITÀ

$\forall a, b, c \in G$

$\Downarrow$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

ELEMENTO IDENTITÀ

$\exists$ un elemento $e \in G$ t.c.

$e \cdot a = a \cdot e = a$

ELEMENTO INVERSO

$\forall a \in G \; \exists a^{-1} \in G$

$a \cdot b = b \cdot a = e$

$$\int d\underline{x} = \int d\underline{x}\ |\det M|$$

In realtà avremo STRUTTURE MOLTO PIÙ COMPLESSE nello Sp. delle FASI, Cioè

$$\begin{cases} I = \oint_{C(t)} dq \cdot p & \text{INVARIANTE di POINCARÉ} \\ C(t) \text{ CURVA CHIUSA CHE SI} \\ \text{MUOVE SECONDO DINAMICA HAMILTONIANA} \end{cases}$$

P_2) SE M è SIMPLETTICA

$\Downarrow$

M^t è SIMPLETTICA

$$M J_N M^t = J_N$$

$$(M J M^t)^t = J_N^t = -J_N$$

$$M J^t M = J^t$$

$$-M J M = -J \quad \Rightarrow J M J = J$$

CVD

Un GRUPPO è ABELIANO se

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Proprietà di J_N

$$J_N = \begin{pmatrix} 0_N & +\mathbb{1}_N \\ -\mathbb{1}_N & 0_N \end{pmatrix}$$

$$J_N \cdot J_N = -\mathbb{1}_{2N} \quad (*)$$

$$J_N^t = -J_N \quad (**)$$

$$J_N^t = +J_N^{-1} = -J_N \quad (***)$$

e

$$J_N \cdot J_N = -J_N \cdot J_N^{-1} = -\mathbb{1}$$

ok

Spettro degli Esponenti di Lyapunov

Hp) SISTEMA HAMILTONIANO

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F} = J \cdot \nabla_x H$$

Nello spazio tangente

$$\delta\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 F_N}{\partial x_N \partial x_1} & & & \frac{\partial^2 F_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} \delta\underline{x}$$

Nei sistemi hamiltoniani:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{2N} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}$$

$$\delta\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{2N} J_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_i} \delta x_i$$

$$\overset{?}{\Downarrow}$$

$$\delta\dot{\underline{x}} = J \cdot L\, \delta\underline{x} \qquad L_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}$$ HESSIANA

Al 1° ordine in dt

$$\delta\underline{x}(t+dt) = \delta\underline{x}(t) + JL\,\delta\underline{x}(t)\cdot dt$$

$$= \underbrace{(\mathbb{1} + JL\,dt)}_{A}\,\delta\underline{x}$$

Def. MAT. SIMMETRICA

$$A^t = A$$

A è SIMPLETTICA

$$A^t J_N A =$$

$L \quad A^+ = A^t$

$$= (\mathbb{1} + JL\,dt)^t J (\mathbb{1} + JL\,dt) =$$
$$= (\mathbb{1} + L^t J^t dt) J (\mathbb{1} + JL\,dt) =$$
$$= J + J \cdot J L\,dt + L^t J^t J\,dt + L^t J^t J J L\,dt^2$$

$J_N \cdot J_N = -\mathbb{1}_{2N}$

$$= J - L\,dt + L^t\,\mathbb{1}\,dt + (L^t J L)\,dt^2$$

$J^t = J^{-1} = -J_N$

Per la mat. Hessiana vale
$L^t = L$

$\Downarrow$

A è simplettica al 1° ordine in dt

— o —

Mappa simplettica sp. tangente

Hp) fisso $dt = 1$ / al 1° ordine

$$\begin{cases} \delta x_{n+1} = D\underline{F}(x_n)\,\delta x_n \\ DF(x_n) \text{ è simplettica} \end{cases}$$

Gli esp. di Lyapunov sono legati agli autovalori di

aggiunta trasposta e coniugata

$$\Lambda(\underline{x}_0) = \lim_{N \to \infty} \left[\overline{DF^N(x_0)}\, DF^N(x_0) \right]^{1/2N}$$

- $DF^N(x_0) = \prod_{i=0}^{N-1} DF(x_i)$ è SIMPLETTICA / PRODOTTO di MAT SIMPLETTICHE

- LA $(DF^N)^+$ è SIMPLETTICA

$\Downarrow$

T è SIMPLETTICA

$\underline{\underline{\text{T è HERMITIANA}}}$!!

Gli autovalori λ_k di T sono SOLUZIONI $\lambda_k = e^{i\alpha_k}$ del POLINOMIO CARATTERISTICO

$$D(\lambda) = \det[T - \lambda \mathbb{1}]$$

Se T è simplettica vale

$$T J T^+ = J$$

$$T J = J (T^+)^{-1}$$

$$T = J (T^+)^{-1} J^{-1}$$

$\Downarrow$

$$D(\lambda) = \det[J (T^+)^{-1} J^{-1} - \lambda \mathbb{1}]$$

- $T^+ = T$
- $\det(D^{-1} B D) = \det B$

$\Downarrow$

$$D(\lambda) = \det[T^{-1} - \lambda \mathbb{1}]$$

$\Downarrow$

1) gli AUTOVALORI di A e A^{-1} sono gli STESSI

2) Dato che gli AUTOVALORI di A^{-1} e A sono INVERSI uno degli altri

$\Downarrow$

Distribuzione a coppie $\left(\Lambda_i, \frac{1}{\Lambda_i}\right)$

e quindi anche gli esp. di Lyapunov debbano essere a coppie

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = \ln \| \Lambda_i \| = - \lambda_{2N-i+1} \\ \sum_{i=1}^{2N} \lambda_i = 0 \quad \text{TEO di LIOUVILLE} \end{array} \right\}$$