[ATTRATTORI STRANI]

{ Nei SISTEMI DISSIPATIVI si ha un TRANSITORIO seguito da un REGIME ASINTOTICO.

Nel REGIME ASINTOTICO la DINAMICA si svolge su un ATTRATTORE di DIMENSIONE INFERIORE a quella dello spazio delle FASI.

Def. INSIEME ATTRATTIVO A

Hp) i) $\underline{X}_N = \underline{F}(\underline{X}_{N-1})$

$\underline{F}$ è un DIFFEOMORFISMO, cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \underline{F} \in C^1 \text{ ed è INVERTIBILE} \\ \text{ii) } \exists\, \underline{F}^{-1} \in C^1 \end{array} \right\}$$

Ts) A è un INS. ATTRATTIVO

se

1) DATO un INS. APERTO U (VOLUME) nello sp. delle fasi la sua N-esima IMMAGINE $F^N(U)$ è ARBITRARIAMENTE VICINA ad un INSIEME COMPATTO A per N SUFF. GRANDE

cioè

$\forall$ aperto $\underset{\text{V CHE CONTIENE A}}{V \supset A} \Rightarrow \underset{F^N(U) \text{ è CONTENUTO IN V}}{F^N(U) \subset V}$ se $N > N_c$

2) $\left\{ \begin{array}{l} F^N A = A \quad \forall N \geq 0 \\ \text{A è INVARIANTE sotto le APPLICAZIONI} \\ \text{della MAPPA} \end{array} \right.$

$\boxed{\text{COMPATTO = CHIUSO e LIMITATO !!}}$

La soluzione asintotica $F^N(\underline{x})$ giace in un insieme più piccolo di A detto ATTRATTORE, in questo alcuni punti di A possono essere NON ATTRATTIVE.

Def. BACINO di ATTRAZIONE $\mathcal{B}(A)$

Il Bacino di Attrazione di A è l'unione di tutte le preimmagini ~~delle~~ di A

$$F^N \mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(A)$$

invariante sotto l'applicazione della mappa

Def. OPERATIVA di ATTRATTORE.

E' il luogo di accumulazione dei punti

$$\underline{x}_n = \underline{F}^n(\underline{x}_0) + \sigma \text{ per } n \to \infty$$

sotto l'azione di un termine di rumore σ nel limite di $\sigma \to 0$.

NOTA 1

La presenza del termine σ assicura la STABILITÀ delle soluzioni finali

[Un insieme attrattivo A contiene le VARIETÀ INSTABILI di tutti i suoi punti]

Def. ATTRATTORE [MILNOR 1985]

- **Def.** INSIEME LIMITE $\omega(\underline{x})$

$\omega(\underline{x})$ è l'INSIEME LIMITE di $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$

Un pto $\underline{y} \in \mathbb{R}^d$ appartiene a $\omega(\underline{x})$

$$\Updownarrow$$

$\forall \epsilon > 0$ e $\forall N_0 > 0$ $\exists N > N_0$: $\| \underline{y} - \underline{F}^n(\underline{x}) \| < \epsilon$

ovvero

- $\omega(\underline{x})$ è l'INSIEME di TUTTI i punti che possono essere RAGGIUNTI ASINTOTICAMENTE dalla CONDIZIONE INIZIALE $\underline{x}$

Def. ATTRATTORE

Hp) i) Λ è un INSIEME CHIUSO NON DECOMPONIBILE

ii) Λ è INVARIANTE sotto l'AZIONE del DIFFEOMORFISMO $\underline{F}$: $\underline{F}^N(\Lambda) = \Lambda$

$$\Downarrow$$

Λ è un ATTRATTORE per $\underline{F}$, se il BACINO d'ATTRAZIONE $\mathcal{B}(\Lambda)$, che è composto da TUTTI i PUNTI $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$:

$\omega(\underline{x}) \in \Lambda$,

ha MISURA POSITIVA secondo LEBESGUE

Def. INSIEME di MISURA NULLA secondo LEBESGUE.
Un INS ha MISURA di LEBESGUE 0,
se $\forall \epsilon > 0$ l'insieme può essere coperto dalla unione di un numero di intervalli NUMERABILE t.c. la SOMMA delle LUNGHEZZE degli INTERVALLI sia MINORE di ϵ
[In uno SPAZIO a N-dim agli INTERVALLI sostituisco i CUBI N-dim]

Def. INSIEME di CANTOR C

C è un INSIEME CHIUSO fatto di PUNTI di FRONTIERA che sono PUNTI di ACCUMULAZIONE dell'INSIEME.

Def ATTRATTORE Λ (JOST 2005)
Λ è l'INSIEME INVARIANTE più piccolo che NON può ESSERE DECOMPOSTO in 2 o più sotto-insiemi con BACINI d'ATTRAZIONE DISTINTI

— o —

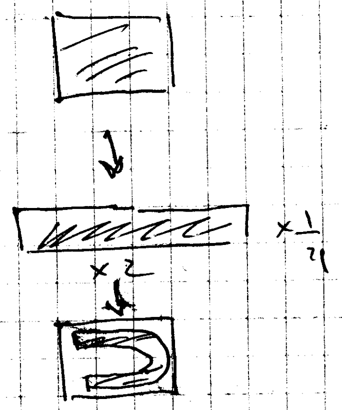
In genere infeconnessi agli ATTRATTORI STRANI si ha un gran numero di ORBITE PERIODICHE INSTABILI, residui di orbite stabili a valori diversi del parametro -
Gli ATT. STRANI sono fatti dalle VARIETÀ INSTABILI di ORBITE PERIODICHE INSTABILI

- FRATTALI -

1) Per sp. fasi $N=3$ la dimensione dell'attrattore d deve essere

$$\left.\begin{array}{ll} d < 3 & \text{DISSIPAZIONE} \\ d > 2 & \text{TEO. POINCARÉ-BENDIXON} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 < d < 3$$

2) Come visto nell'ATTRATTORE a FERRO di CAVALLO (SMALE) ha una STRUTTURA



- * ESTREMAMENTE FOGLIATA
- ** AUTO-SIMILARE (è regolare ad ogni scala)

↓

A VARI LIVELLI di RISOLUZIONE hanno la STESSA STRUTTURA

⇓

Lungo la DIREZIONE y l'ATTRATTORE di SMALE è un INSIEME TIPO CANTOR!

INSIEME di CANTOR (TRIADICO),

- Prendo insieme $[0, 1]$
- lo divido in 3 parti eguali ed elimino l'intervallo APERTO $(1/3, 2/3)$
- Si ripete la procedura sui 2 intervalli restanti $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ eliminando gli intervalli $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$
- così via all'infinito

$\Downarrow$

Questo insieme è <u>INVARIANTE</u> per <u>TRASFORMAZIONI</u> di <u>SCALA</u>, a seconda della RISOLUZIONE a cui lo si guarda, esso MOSTRA sempre la <u>STESSA</u> <u>STRUTTURA</u>.

Le sue proprietà sono

1) MISURA di LEBESGUE NULLA
2) INSIEME è NON NUMERABILE
3) INSIEME AUTO-SIMILARE

— 1 —

Al passo n abbiamo 2^n intervalli di lunghezza 3^{-n}, allora $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ un ricoprimento NUMERABILE dell'INSIEME fatto di $2^{\bar{n}}$ intervalli di lunghezza $3^{-\bar{n}}$:

$$L = \left(\frac{2}{3}\right)^{\bar{n}} < \epsilon$$

$$\bar{n} = \frac{\ln \epsilon}{\ln (2/3)} + 1$$

Allora la sua misura è 0 per Lebesgue

— 2 —

Dato $x \in [0,1]$ lo posso scrivere come una STRINGA BINARIA

$$\begin{cases} x = 0.s_1 s_2 s_3 \dots = \sum_{j=1}^{\infty} s_j 2^{-j} \\ s_j \in \{0,1\} \end{cases}$$

- Ogni punto nell'ins. di CANTOR si può identificare con una SEQ. BINARIA

1 0 0 1 . .

1 → Al 1° passo è a DESTRA dell'INTERVALLO RIMOSSO $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

0 → Al 2° passo è a SINISTRA dell'INTERVALLO RIMOSSO $\left(7/9, 8/9\right)$

0 → Al 3° passo è a SINISTRA I.NT. RIMOSSO

etc.

$\Downarrow$

Ho una corrispondenza BIUNIVOCA (No) fra i pti dell'ins. di CANTOR e i NUMERI REALI in $[0,1]$, che sono NON NUMERABILI

IN REALTÀ è SURIETTIVA, MA NON INIETTIVA

Per codificare l'ins. di Cantor è utile scrivere ogni numero $x \in [0,1]$ in base 3

$$\begin{cases} x = 0.t_1 t_2 t_3 \dots = \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j} t_j \\ t_j \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

ATTENZIONE

Questa rappresentazione **NON** è **UNIVOCA**

$$\frac{1}{3} = 0.1000\dots = 0.02222\dots$$

$$\frac{2}{3} = 0.20000\dots = 0.12222$$

Un modo per renderla UNIVOCA è di proibire che un 1 sia SEGUITO da una INFINITÀ di 0 o di 2...

• I numeri $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ sono della forma

$$x = 0.1\,t_2 t_3 \dots$$

se ELIMINO tale INTERVALLO ciò che resta è NUMERI del tipo

$$0.t_1 t_2 t_3 \dots \quad \text{con } t_1 \in \{0, 2\}$$

•• Se ELIMINO gli INTERVALLI $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ ciò che resta è Numeri della FORMA

$$0.t_1 t_2 t_3 \dots \quad t_1 \text{ e } t_2 \in \{0, 2\}$$

L'INSIEME di CANTOR corrisponde ai Nri della FORMA

$$X = 0.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots \qquad \sigma_j \in \{0,2\}$$

P1) Se ora scambio tutti i 2 → 1 ottengo i veri reali in $[0,1]$ scritti in base 2 [VEDI DOPO]

$\Downarrow$

* INS. CANTOR ha la POTENZA del CONTINUO
* COME l'INS. di $\mathbb{R}$ NON contiene PUNTI ISOLATI

P2) TUTTI i PUNTI SONO di FRONTIERA

In ogni intorno di un pto dell'insieme di Cantor ∃ un pto y che NON gli Appartiene, sia piccolo che gli appartengono!

Se $x = 0.\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n \ldots \in$ INS CANTOR

$y = 0.\sigma_1\sigma_2 \ldots 1 \ldots \notin$ INS. CANTOR

a distanza 3^{-n} piccola a piacere

P3) TUTTI i PUNTI SONO d'ACCUMULAZIONE

{ P è un pto d'accumulazione per S, se $\forall \epsilon$ $I_\epsilon(P)$ contiene almeno un pto di S. }

$\Downarrow$

INS. di CANTOR è CHIUSO, poiché CONTIENE TUTTI I SUOI PUNTI d'ACCUMULAZIONE

L'INSIEME di CANTOR È AUTO-SIMILARE

- Se considero la porzione dell'INSIEME contenuta in $[0, 3^{-N}]$ e ne la DILATA di un FATTORE 3^N

$\Downarrow$

ottengo tutti i numeri della forma

$$\begin{cases} 3^N \sum_{j=N+1}^{\infty} t_j 3^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} t_{N+j} 3^{-j} \\ t_j \in \{0, 2\} \end{cases}$$

$\Downarrow$

cioè riottengo l'INSIEME di CANTOR tutto INTERO

— o —

[AUTO - SIMILARITÀ]

A DIVERSI LIVELLI di RISOLUZIONE mostra la STESSA STRUTTURA !

$\Downarrow$

Non è una cosa necessariamente associata a COMPORTAMENTI CAOTICI la posso ottenere in VARI MODI !!!