« KOLMOGOROV-SINAI ENTROPY » (18)

Hp) 1) PARTIZIONE A dello Spazio delle FASI M-d in IPERSFERE DI RAGGIO δ

2) DISCRETE TIME ERGODIC MAP

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{F}(\underline{x}_n)$$

CON MISURA INVARIANTE ASSOCIATA μ

3) DATO IL RAFFINAMENTO di ORDINE N

$$A^N = \bigvee_{k=0}^{N-1} F^{-k} A$$

Ogni elemento NON VUOTO di A^N corrisponde ad una PAROLA

$$S_N = \{ s_0, s_1, \ldots, s_{N-1} \}$$

La parola $\bar{S}_N \rightarrow B_0 = A_{s_0} \cap F^{-1} A_{s_1} \cap F^{-2} A_{s_2} \ldots \cap F^{-(N-1)} B_{s_{N-1}}$

ha la SEGUENTE PROBABILITÀ di essere trovata

$$\gamma(\bar{S}_N) = \mu(B_0)$$

N-BLOCK ENTROPIES

$$H_N(A) = H(A^N) = -\sum_{\{S_N\}} P(S_N) \ln P(S_N)$$

e le DIFFERENCE ENTROPIES

$$h_N(A) = H_N(A) - H_{N-1}(A)$$

L'ENTROPIA di SHANNON che caratterizza il sistema rispetto alla PARTIZIONE A è data da

$$h(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{H_N(A)}{N} = \lim_{N\to\infty} h_N(A)$$

questo è il RATE of INFORMATION PRODUCTION o (or AVERAGE INFORMATION AMOUNT per SYMBOL EMITTED) of the SOURCE.

* AVERAGE UNCERTAINTY per TIME STEP ON THE PARTITION ELEMENT VISITED by THE ORBIT

~ . ~

SINCE WE WANT TO CHARACTERIZE THE SOURCE AND NOT A SPECIFIC PARTITION A

$\Downarrow$

$$K(1) = h_{KS} = \sup_A \{h(A)\}$$

KOLMOGOROV-SINAI ENTROPY

NB 1

THE UPPER LIMIT IS NECESSARY BECAUSE MISPLACED PARTITIONS CAN REDUCE UNCERTAINTY EVEN FOR CHAOTIC SYSTEMS!

NB 2

h_{KS} è INVARIANTE a ISOMORFISMI FRA SISTEMI DINAMICI

× IF G IS GENERATING

$$h_{KS} = h(G)$$

× SE LA PARTIZIONE NON È NOTA ALLORA

$$K(1) = h_{KS} = \lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to \infty} -\frac{1}{n} \sum_{\{S_n\}} P(S_n) \ln P(S_n)$$

LA PARTIZIONE NEL LIMITE $\delta \to 0$ SARÀ CONTENUTA IN UNA PARTIZIONE GENERATRICE

– I DUE LIMITI SONO OPPOSTI alla DEFINIZIONE del Lyapunov e NON POSSONO ESSERE SCAMBIATI

<KS Entropy and Lyapunov Spectrum>

Topological Entropy $\qquad h(F|B) = \lim_{N\to\infty} \frac{\ln L(B^N)}{N}$

Numero di Parole Ammissibili $\qquad \begin{cases} L(B^N) \underset{N\to\infty}{=} e^{N h(F|B)} \leq M^N \\ M \text{ simboli} \end{cases}$

Kolmogorov-Sinai Entropy

$$h_{KS}(B) = \lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N}\sum_{\{S_N\}} P(S_N)\ln P(S_N) =$$

Numero Tipico di Parole Misurate $\qquad L^{eff} \sim e^{N h(B)}$

$$= -\frac{1}{N} \langle \ln P(S_N) \rangle$$

Il Numero Tipico di Parole di Lunghezza $N \to L^{eff}$

sarà circa

$$P \sim \frac{1}{L^{eff}}$$

~ . ~

In genere $\begin{cases} L^{eff}_N < L(B^N) < M^N \\ h_{KS} \leq h_T \leq \ln M \end{cases}$ $\qquad M =$ Numero Simboli

~ . ~

Hp) 1) Partizione dello Spazio delle Fasi con Ipercubi di Lato δ

2) $\underline{x}_0 \in V_0$ quale è il Numero di Possibili Sequenze dovute a Traiettorie che Partono in V_0?

$$h_{KS} = \lim_{\delta \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \ln L^{eff}(\delta)$$

SAPPIAMO ALTRESÌ che

$$\begin{cases} V(t) \sim V_0 \, e^{\left(\sum_{j=1}^{M} \lambda_i\right) N} \\ \text{MA QUESTO È VERO SOLO PER} \\ \quad \text{PERTURBAZIONI INFINITESIME } \delta_0 \to 0 \end{cases}$$

PER LE SOLUZIONI FINITE δ

→ L'EFFETTO delle DIREZIONI CONTRAENTI ($\lambda_j < 0$) È COMPLETAMENTE "SPAZZATO VIA"

→ RESTANO SOLO LE DIREZIONI ESPANDENTI

$$\begin{cases} V(\delta, t) \sim V_0 \, e^{\left(\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i\right) N} \\ \text{per } V_0 \text{ SUFF. PICCOLO} \end{cases}$$

$\Downarrow$

DATO CHE

$$L^{eff}(\delta, N) \propto \frac{V(\delta, t)}{V_0}$$

$\Downarrow$

$$h_{KS} = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

PESIN RELATIONSHIP

VALE per SISTEMI IPERBOLICI

In generale vale

$$K(1) = h_{KS} \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

~ . ~

La $K(1)$ dà la RATE of INFORMATION GENERATION for TYPICAL SEQUENCES, to take in account the (finite-time) fluctuations of the entropy with the Renyi ENTROPIES $K(q)$ [which ARE NOT ADDITIVE AND THEREFORE UNIQUE]

CONTINUOUS TIME

H_p) INTRODUCE TIME DISCRETIZATION WITH A TIME LAG τ

$$\Downarrow$$

$$h_{KS} = \sup_A \frac{h(A)}{\tau}$$

IL RATE $h(A)/\tau$ NON DIPENDE TEORICAMENTE DA τ, ma la scelta di un τ OTTIMALE è MOLTO IMPORTANTE

IN PRATICA