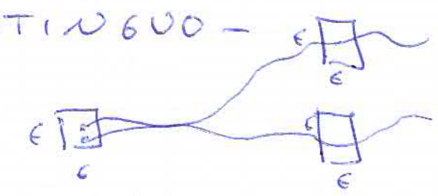
[ENTROPIE]

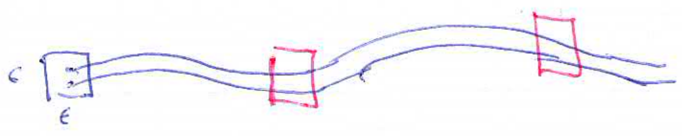
L'entropie sono associate alla <u>VELOCITÀ</u> con cui VIENE <u>CREATA</u> <u>INFORMAZIONE</u> durante l'evoluzione <u>CAOTICA</u> di un ORBITA.

- Se possiamo osservare i valori di una variabile dinamica solo con una RISOLUZIONE LIMITATA, ma riesco a DISTINGUERE 2 pti più vicini di ϵ, allora 2 C.I vicine (entro ϵ) appaiono le stesse.

- ·· Durante l'evoluzione CAOTICA le 2 orbite si allontanano esponenzialmente, e le differenze divengono maggiori di ϵ, allora ho ACQUISITO INFORMAZIONE sulle 2 orbite, le DISTINGUO e posso risolvere con MAGGIORE PRECISIONE alla COND. INIZIALE.



- ··· ORBITE NON CAOTICHE, NON DISTINGUERÒ MAI 2 COND. INIZIALI CON DISTANZA < ϵ



$\Longleftarrow$

$\boxed{\text{NESSUNA CREAZIONE D'INFORMAZIONE}}$

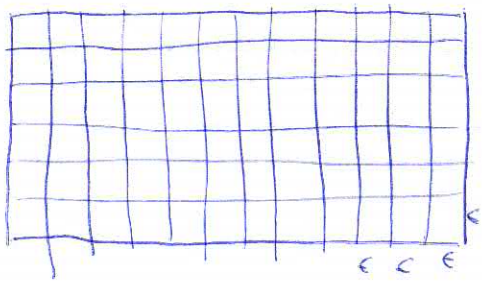
ENTROPIA TOPOLOGICA

Hp) 1) RISOLUZIONE LIMITATA ε con cui misuro le variabili

[10^{-14} → Real×8]

$\underline{X} \in \mathbb{R}^M$

$\underline{x}^{N+1} = \underline{F}(\underline{x}_N)$



2) Questo equivale ad avere una PARTIZIONE dello SPAZIO delle FASI in L SCATOLE di LATO ε [IPERCUBI] nello spazio $\mathbb{R}^M$

$\{B_j\}$ $j = 1, \dots, L$

OGNI ELEMENTO IDENTIFICATO DA UN SIMBOLO $S_n \in [1, L]$

3) $t=0$ {La mia condizione iniziale è nella SCATOLA B_i}

e

⇓

Seguendo la evoluzione nel tempo della scatola B_i al tempo N la sua immagine sarà

$\underline{F}^N B_i$

e sarà piuttosto estesa a causa della SIC e andrà a intersecare molti elementi della partizione_

4) L'incertezza nelle condizioni iniziali si AMPLIFICA nel TEMPO e ciò serve ad individuare MEGLIO le VARIE TRAIETTORIE originatesi da B_i

- Durante il moto di un punto lungo la traiettoria esso cade in ELEMENTI DIVERSI della PARTIZIONE B_k -

.. Registro i SIMBOLI $s_k \in [1, L]$ con cui sono identificati gli elementi.

... Ad ogni TRAIETTORIA $\underline{x}(t)$ ASSOCIAMO la sua SEQUENZA SIMBOLICA ⟷ PAROLA

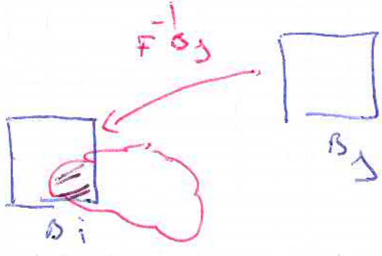
$$S_N = \{ s_0, s_1, \dots, s_N \}$$

.... Tale sequenza più lunga è meglio identifica la COND. INIZIALE

ES -

Il punto a
$$\begin{cases} n = 0 & B_i & s_0 = i \\ n = 1 & B_j & s_1 = j \end{cases}$$

$$\Downarrow$$



$$\begin{cases} \underline{X}_0 \in B_i \cap \underline{F}^{-1} B_j \\ \underline{F}^{-1} B_j = \text{PRE-IMMAGINE DI } B_j \text{ AL TEMPO PRECEDENTE} \end{cases}$$

La COND. INIZIALE È MEGLIO IDENTIFICATA APPARTIENE A UN SOTTO-INTERVALLO DI B_i

Hp) DATA $S_N = \{ S_0, S_1, \dots, S_N \}$

$\Downarrow$

$\underline{x}_0$ APPARTIENE al SEGUENTE SOTTO-INTERVALLO

$$\begin{cases} \underline{F}^{n}(\underline{x}_0) \in B_{S_n} \\ \forall n = 0, \dots, N-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \underline{x}_0 \in \bigcap_{n=0}^{N-1} F^{-n} B_{S_n}$$

Non tutte le parole sono AMMISSIBILI, non tutte corrispondono ad una DATA CONDIZIONE INIZIALE data una CERTA MAPPA!!!

Più parole S_N sono AMMISSIBILI più il SISTEMA sarà COMPLESSO

$\Downarrow$

La COMPLESSITÀ del SISTEMA si può stimare da come CRESCE con $\boxed{N}$ il NUMERO DI PAROLE AMMISSIBILI S_N, nel $\boxed{\text{LIMITE } N \to \infty}$

Def. INTERSEZIONE di 2 partizioni A e B

$$A \vee B = \{ A_i \cap B_j \,;\, \forall i, j \}$$

Def. RAFFINAMENTO DI B

$$F^{-1} B \vee B$$

Def. RAFFINAMENTO di ORDINE N

$$B^N = \bigvee_{n=0}^{N-1} F^{-n} B$$

OGNI ELEMENTO CORRISPONDE AD A PAROLA S_N

$\Downarrow$

Ogni ELEMENTO NON VUOTO di B^N CONTIENE delle CONDIZIONI INIZIALI che PRODUCONO TUTTE la $\boxed{\text{STESSA}}$ SEQUENZA di LUNGHEZZA N-

Def. ENTROPIA TOPOLOGICA DI F risp. (PARTIZIONE) (COPERTURA) B

$$\begin{cases} h(F|B) = \lim_{N \to \infty} \dfrac{\ln L(B^N)}{N} \\ L(B^N) = \text{NUMERO (MINIMO) DI PAROLE } S_N \text{ AMMISSIBILI DI LUNGHEZZA } N \\ \text{[NUMERO DI ELEMENTI NON VUOTI DI } B^N\text{]} \end{cases}$$

$$\left\{ L(B^N) \underset{N \to \infty}{=} e^{N h(F|B)} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ENTROPIA TOPOLOGICA} \\ h(F) = \sup_B h(F|B) \end{array} \right\}$$

ESTREMO SUPERIORE SU TUTTE LE PARTIZIONI POSSIBILI

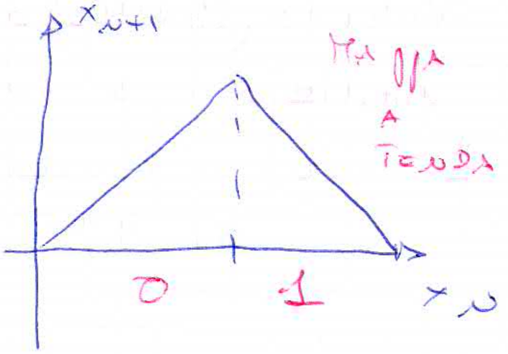
L'estremo superiore è raggiunto per le PARTIZIONI GENERATRICI B_G * $h(F) \equiv h(F|B_G)$

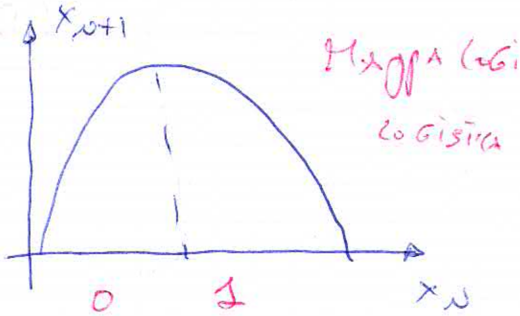
— Def. PARTIZIONE GENERATRICE —

Una partizione è GENERATRICE se ogni SEQUENZA INFINITA $S_{N\to\infty}$ INDIVIDUA 1 solo PUNTO (COND. INIZIALE) sull'ATTRATTORE!

$\Downarrow$

Se trovo la partizione generatrice allora lo studio delle SEQUENZE SIMBOLICHE corrisponde alla evoluzione delle ~~stati~~ TRAIETTORIE REALI



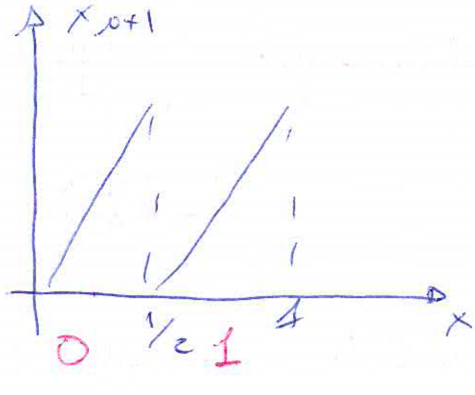


0 1 0 0 1 0

BERNOULLI SHIFT — CODIFICA BINARIA

COND. 1

$x_{N+1} = F(x_N) = 2\cdot x_N \bmod 1$



15

COND. INIZIALE $\qquad a_0 = 0 \cdot 2^0 = 0$

$a_0 = 0$

$$X_0 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j} = (0, a_1 a_2 a_3 \cdots)$$

$a_j \in \{0,1\}$

$0 \le X_0 \le 1 \qquad \begin{cases} X_0 < 1/2 & a_1 = 0 \\ X_0 > 1/2 & a_1 = 1 \end{cases}$

1^a ITERATA

$$X_1 = \nabla(X_0) = \begin{cases} 2 \cdot X_0 & \text{PER } a_1 = 0 \\ 2X_0 - 1 & \text{PER } a_1 = 1 \end{cases} \rightarrow X_1 = a_1 2^0 + \sum_{j=2}^{\infty} a_j 2^{-j+1} =$$

$$= a_1 2^0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 2^{-k} = 2X_0$$

SE $a_1 = 0 \qquad X_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 2^{-k} = [0, a_2 a_3 a_4 \cdots]$

SE $a_1 = 1 \qquad X_1 = 2X_0 - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 2^{-k} = [0, a_2 a_3 a_4 \cdots]$

$\Downarrow$

L'AZIONE SUL BERNOULLI È SHIFTARE LA SEQUENZA BINARIA VERSO SINISTRA ED ELIMINARE IL primo <u>DIGIT</u>

$S_N = \{0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0\}$

SE HO M SEQUENZE DI LUNGHEZZA N

$\Downarrow$

QUANTE NE AVRÒ DI LUNGHEZZA N+1

$$S_N \to \begin{cases} S_N + 0 \\ S_1 + 1 \end{cases} \qquad \boxed{2 \times M}$$

QUI LE SEQUENZE SONO TUTTE POSSIBILI

$\Downarrow$

$$L(B^N) = c \cdot 2^N$$

$$\boxed{h = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \ln L(B^N) = \ln 2 = \lambda_{MAX}}$$

BERNOULLI SHIFT

— o —

SISTEMA CAOTICO $h > 0$ $\boxed{h \text{ FINITA}}$

SISTEMA PERIODICO O QUASI PERIODICO $h = 0$ $\boxed{L(B^N) \propto N}$ QUASI-PERIODICO

SISTEMA PURAMENTE STOCASTICO $h \to \infty$ $\boxed{h \text{ NON SATURA AL CRESCERE DI } N}$

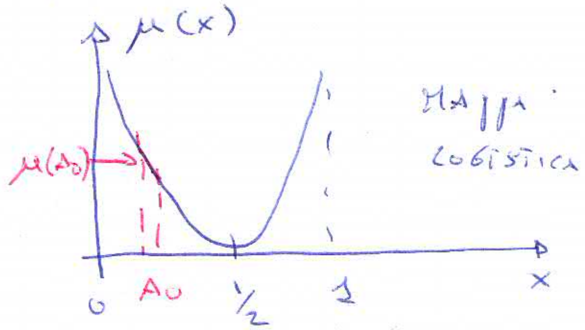
- ENTROPIE METRICHE -

⇒ Per ora NON ci siamo INTERESSATI alla PROBABILITÀ con cui posso avere una certa SEQUENZA S_N

→ { A parità di lunghezza alcune più PROBABILI - altre MENO PROBABILI } ←

⇓

Ciò è legato alla MISURA delle CONDIZIONI INIZIALI che generano una CERTA PAROLA



- Le C.I associate ad una certa parola giacciono nello intervallo:

$$S_N = \{ s_0, s_1, \dots, s_N \}$$

$$A_0 = B_{s_0} \cap F^{-1} B_{s_1} \cap \dots \cap F^{-(N+1)} B_{s_{N-1}}$$

$$\mu(1/2) \ll \mu(0), \mu(1)$$

⇓

La PROBABILITÀ di ottenere S_N è data dalla MISURA di A_0

$$P(S_N) = \mu(A_0)$$

Es. $\mu(0 \le x \le 1/2) = 50\% = P$

⇓

Hp) DIVIDO LO SPAZIO M-DIM IN IPERSFERE DI RAGGIO δ

$$\begin{cases} K(q) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \frac{1}{1-q} \ln \sum_{S_N} P^q(S_N) \\ \text{ENTROPIA METRICA GENERALIZZATA} \end{cases}$$

$\delta \to 0$ GARANTISCE CHE TROVO SEMPRE una PARTIZIONE GENERATRICE

$q = 0$

$$P^0(S_N) = 1$$

$$\sum_{S_N} 1 = L_N(\delta)$$

N ro PAROLE di LUNGHEZZA N per la PARTIZIONE di RAGGIO δ

$\Downarrow$

$$\begin{cases} K(0) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} L_N(\delta) = h \\ \text{ENTROPIA TOPOLOGICA} \end{cases}$$

$q = 1$

$$K(1) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{N \to \infty} -\frac{1}{N} \sum_{S_N} P(S_N) \ln P(S_N)$$

$\sum_{S_N} \to$ Equivale a sommare sugli stati della partizione

$K(1)$ = ENTROPIA di KOLMOGOROV-SINAI

17

- RELAZIONE di PESIN -

Hp) ATTRATTORE IPERBOLICO

$$\boxed{K(1) = \sum_{k=1}^{s^+} \lambda_k} \geq h = K(0)$$

N.B. MAPPE 1-DIM $K(1) = \lambda_{MAX}$ -

* ANALOGIA con la TEORIA dell'INFORMAZIONE di SHANNON *

Hp) Un esperimento ha r possibili RISULTATI e siano $\{p_1, p_2, \dots p_r\}$ le probabilità di tale esperimento -

$\Downarrow$

Quale è la INCERTEZZA sul RISULTATO di un [illegible]
(o INFORMAZIONE GUADAGNATA DA 1 ESPERIMENTO)

$$I = -\sum_{i=1} p_i \ln p_i$$

$$\boxed{p = 0 \quad p \ln p = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0}$$

(1) $p_1 = 1 \quad p_2 = p_3 = \dots p_r = 0$ NESSUNA INCERTEZZA

$\Downarrow$

$$I = 0$$

(2) $p_1 = p_2 = \dots p_r = \frac{1}{r}$ MASSIMA INCERTEZZA

$$I = \ln r$$

Dato che

$$\sum_i p_i = 1$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq I \leq \ln z$$