

PIANO delle LEZIONI:

- Mappe STEREOSCOPICHE
- Ser. POLICALE
- MAPPA di SCALE
- SISTEMA DISSIPATIVO

3, 2 g

CASO DETERMINISTICO
DI GEN. C. MIE (SIC)

ΑΠΛΑΙΟΛΕ ΣΤΑΔΟ

VALETA - AUTOBIMICALITA

3, 0 g

1h 30'

ΥΑΛ
206
14:13-17:00
21/11

ΕΣΥ. DI CYCΛΟΥΣ 1D 1, 5 g

Σπείρο CYX γ. ← ΜΑΡΤΑΓΑΛΙΟ 1, 5 g
+
DIT. Α ΠΛΑΙΟΛΕ

??
o o

MAPPE M-DIT 2, 5 g

1h 30'

11, 5 g * ΤΑΟΠΠΟ

ΜΕΑ
112
11:30-13:00

ΣΥ. CYCΛΟΥΣ
MAPPE-M DIT 2, 5 g

ΕΝΤΡΟΠΙΑ
ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΑ 3, 0 g

ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΜΕΤΑΙΚΑ 1, 5 g

1h 30'

7 g

DERIVATA LAGRANGIANA ed EULERIANA

H0

LAGRANGIANO = Xi - nuovo col tempo

EULERIANO = SDR Fisso

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \nabla \mathcal{L} \cdot \underline{v}$$

Eq. di CONTINUITA'

La massa e' conservata

$$\int_V \rho(x, t) dV = \text{cost}$$

Allora anche qualsiasi variabile di massa ottenuta con volume ottenuto da un insieme di pte nel loro moto che aveva attribuito al punto di massa della particella

~~$$\int_V \rho dV = 0 = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dV =$$~~

$$\stackrel{\text{TEO GAUSS}}{=} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{v}) dV$$

||

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad \text{Eq. di CONTINUITA'}$$

$$\text{Ma } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \underline{v} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{d\rho/dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = -g \frac{v}{c}$$

in approssimazione

LAGRANGIANA

- SISTEMI DISSIPATIVI e HAMILTONIANI [CONSERVATIVI] - H_1

i) SISTEMA N -DIM $\underline{x}(t)$

ii) SISTEMA DINAMICO

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$$

Una insieme di N equazioni di questo sistema con condizioni iniziali diverse forma un ENSEMBLE in senso statistico, e si può rappresentare nello SPAZIO delle FASI Γ .

• La distribuzione di queste pt in Γ è descritta da una DENSITÀ di PROBABILITÀ:

$$g(\underline{x}, t=0) \quad \int_{\Gamma} d\underline{x} g(\underline{x}, t=0) = 1$$

\Downarrow

Come EVOLVE g nel TEMPO?

Da CONSERVAZIONE del no di equiche N ci dà la condizione di conservazione

~~$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial g \dot{x}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} [g f_i] = 0$$~~

Ove $g \dot{x}_i = g f_i$ FLOSCO dei PUNTI RAPPRESENTATIVI in un volume $d\underline{x}$ attorno al pto \underline{x} .

è quindi:

$$\underbrace{\frac{\partial g}{\partial t} + \underline{f} \cdot \nabla g}_{dS/dt} + g \nabla \cdot \underline{f} = 0 \quad \frac{dS}{dt} + g \nabla \cdot \underline{f} = 0$$

apparente Lagrangiana

$$S \in \nabla \cdot f = 0$$

3 punti riguardo semplicemente "ADRETTED" del CAMPO di VELOCITÀ in COMPRESSIBILE f



32 volere dei punti è conservato ed il flusso ne conserva solo la galleria iniziale
 ↑ SISTEMI CONSERVATIVI ↑

$$S \in \nabla \cdot f < 0$$

3 volere riguardo costanti SISTEMI DISSIPATIVI

In un SISTEMA HAMILTONIANO $H = H(p_i, q_i)$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \Rightarrow \nabla \cdot f = 0 \quad \text{sempre}$$

SISTEMI A TEMPO DISCRETO - MAPPE

$$\underline{x}^{N+1} = \underline{F}(\underline{x}^N)$$

La trasformazione infinitesimale è data da

$$\underline{y}^{N+1} = \underbrace{DF(\underline{x}^N)}_{\text{JACOBIANO}} \underline{y}^N \quad (x)$$

È la variazione del valore, trasferito secondo la TRASFORMAZIONE LINEARE (x), è regolata da

$$\|DF(\underline{x}^N)\| = \det \|DF(\underline{x}^N)\| \begin{cases} = 1 \text{ Conservato} \\ < 1 \text{ Dissipativo} \end{cases}$$

- Mappe dell'INTERVALLO -

1

Flusso in 3D

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{F}_c(\underline{x}) & c = \text{PARAMETRI di CONTATTO} \\ \underline{x} = \underline{x}(t) \in \mathbb{R}^3 & \text{VETTORE nello Spazio delle FASI} \end{cases}$$

- MAPPA STROBOSCOPICA -

MISURO IL VALORE DI \underline{x} A INTERVALLI di TEMPO COSTANTE

$$t = n \cdot t_0$$

Hp) $t_0 = 1$

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\underline{x}(n t_0 + t_0) - \underline{x}(n t_0)}{t_0} = \underline{F}_c[\underline{x}(n t_0)]$$

$$\underline{x}(n t_0) = \underline{x}_n \quad t_0 = 1$$

$$\underline{x}(n t_0 + t_0) = \underline{x}_{n+1}$$



$$\underline{x}_{n+1} - \underline{x}_n = \underline{G}_c(\underline{x}_n)$$

È quindi risolvendo \underline{x}_n a SINISTRA:

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{F}(\underline{x}_n) \quad \text{MAPPA}$$

La DINAMICA del SISTEMA si ottiene applicando ripetutamente \underline{F}_c ad una condizione iniziale \underline{x}_0

↓

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{F}_c(\underline{x}_n) = \underline{F}_c^2(\underline{x}_{n-1}) \dots = \underline{F}_c^n(\underline{x}_0)$$

- SEZIONI e MAPPE di POLO CARTE -

Per un FLOSCO in 3D la SEZIONE di POLO CARTE si costruisce come intersezione del flusso con un PIANO (2D)-

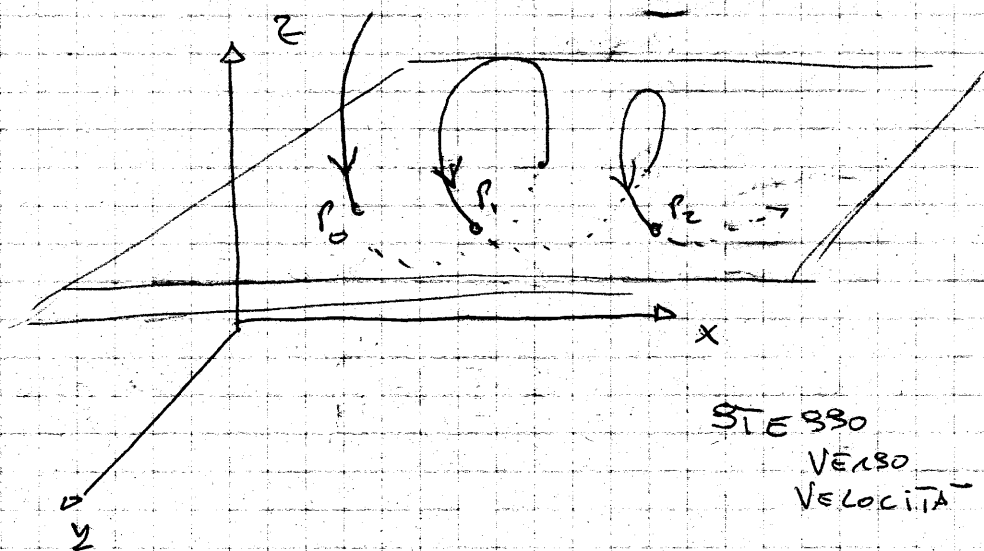
Eq. del flusso

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) \end{cases}$$

Eq. del piano con cui intersechiamo sia

$$z_0 = h(x, y)$$

A $t=0$ siamo sul punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
 dopo un certo tempo T torniamo sul piano



POINCARÉ SECTION

$$z_0 = h(x, y)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z) \end{cases} \quad dt = \frac{dz}{f_3}$$

$$x_1 - x_0 = \int_0^T dt \dot{x} = \int_0^{z_0} dz \frac{f_1}{f_3} = h(x_0, y_0, z_0)$$

$$y_1 - y_0 = \int_0^T dt \dot{y} = \int_0^{z_0} dz \frac{f_2}{f_3} = m(x_0, y_0, z_0)$$

⇓
(x_1, y_1, z_0) DETERMINED by (x_0, y_0, z_0)

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{z_0} dz \frac{1}{f_3(x, y, z)}$$

x, y ARE
FUNCTION
of z

↳ x_0, y_0, z_0

$$\left[T = g(x_0, y_0, z_0) \right]$$

IMPLICIT FUNCTION

Se punto successivo è

(2)

$$P_1 = [x_1(T, x_0, y_0, z_0); y_1(T, x_0, y_0, z_0); z_0]$$

$$x_1 = \int_0^T \dot{x} dt = \int_0^T f(x, y, t) dt = z(T, x_0, y_0, z_0)$$

$\rightarrow x_0, y_0, z_0$ COORD. INIZIALI

(T) può essere ricavato in modo implicito dalla relazione che lega x_1 e y_1 :

$$z_0 = h(x_1, y_1) = h[x_1(T, x_0, y_0, z_0); y_1(T, x_0, y_0, z_0)]$$

$$\Downarrow \boxed{T = g(x_0, y_0, z_0)} !!!$$

(x_1, y_1) SONO FUNZIONI SOLO DI (x_0, y_0)

\Downarrow

$$P_1 = F(P_0)$$

$$P_{n+1} = F(P_n) = F^2(P_{n-1}) = \dots = F^n(P_0)$$

[PUNTI UMBROCAMENTE DETERMINATO DA P_0]

F \rightarrow MAPPA DI POINCARÉ 2D

* gli intervalli di tempo fra 2

ITERATE SUCCESSIVE NON SONO COSTANTI

T NON È COSTANTE

1) FLUSSO SI SVOLGE
SU UNA ORBITA
PERIODICA



~~SEZIONE~~
SER. DI POINCARÉ
I O PIÙ PUNTI ISOLATI

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = F(P_0) = F^2(P_0) \dots = F^n(P_0) \\ P_0 \text{ è un punto fisso della mappa POINCARÉ} \end{array} \right.$$

FLUSSO

SER. POINCARÉ

2) ORBITA QUASI-PERIODICA
CON
2 FREQ. FONDAMENTALI

f_1, f_2



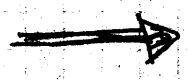
MOTO SU UNA SUPERFICIE
di
un TORO T^2



f_1/f_2 IRRAZIONALE
CURVA CHIUSA

f_1/f_2 RAZIONALE [PERIODICO]
NUMERO FINITO DI
PUNTI
SU UNA CURVA CHIUSA

3) ORBITA APERIODICA
"ATTUALE STRANO"



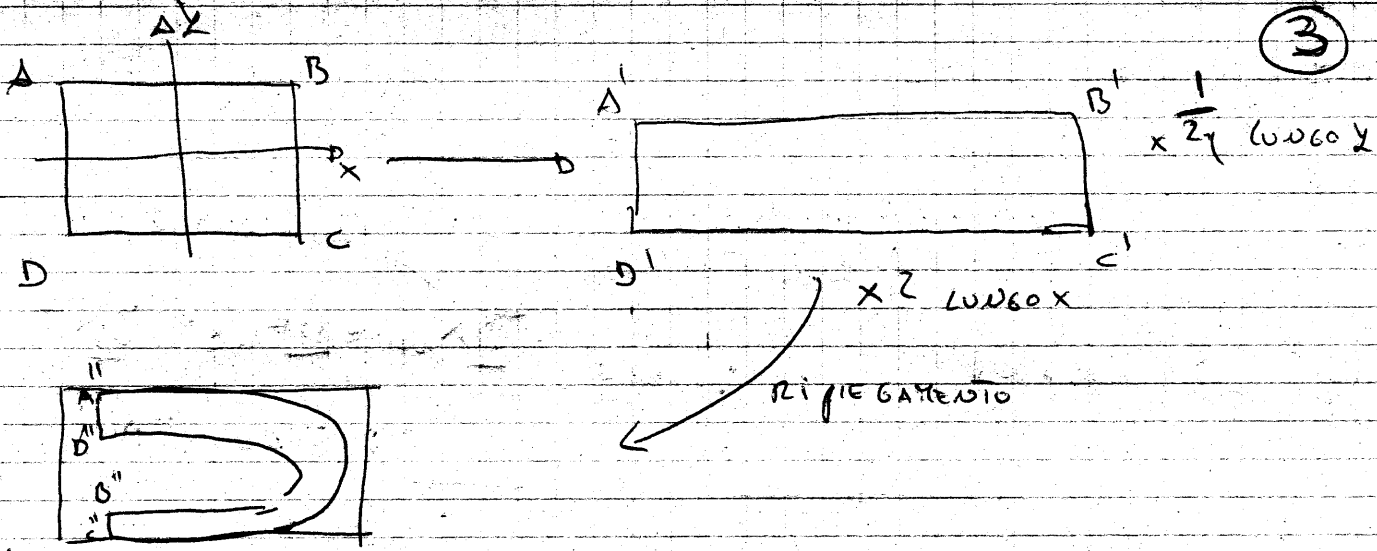
Mappa HENON

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = b x_n \end{cases}$$

STRUTTURA ASSAI RICCA
A FOGLIE

- MAPPA DI SMALE o A FERRO DI CAVICO -

Si può vedere come la mappa di POINCARÉ
di un FLUSSO 3D



- Se espande di una foglia z lungo x
 - Se si contrae di una foglia 2γ lungo y
 - Se si ripiega per farlo esistere nella scatola stessa
- Si ripetono le operazioni, ottenendo una
IMMAGINE DOCTO FOSCIATA

coesistenza degli stratori periodici

Le 3 operazioni geometriche hanno una corrispondenza nella proprietà degli stratori stabili:

CONTRAZIONE ($SE \gamma < 1$) \Rightarrow L'area del rettangolo viene
CONTRATTA - SISTEMA DISSIPATIVO

RIPIEGAMENTO \Rightarrow L'orbita resta in una
zona finita della spazio - STABILE

ALLUNGAMENTO \Rightarrow SENSIBILITÀ alle condizioni
INIZIALI

- SISTEMA DISSIPATIVO -

Per una mappa N -dim

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

VELOCITÀ ELETTO

lo JACOBIANO

Derivato

$$\delta x_{n+1} = DF(x^n) \delta x^n$$

$$|J| = \|DF\| < 1$$

DISCRETE TIME

allora i valori si CONTRAONO nel tempo

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \end{pmatrix}$$

Es. Mappa di Hénon

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a=1.4 \\ b=0.3 \end{matrix}$$

$$|\det J| = b = 0.3 < 1 \quad \text{CONTRAZIONE dei VOCI}$$

~ ~ ~

Per CONTRAZIONI ASSAI FORTI, $b=0$ contragge il piano su una linea!

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 \quad \text{Mappa LOGISTICA}$$



CONTRAZIONE dei VOCI ASSAI RAPIDA

LA SER. di PUNTI SI APPROXIMA AD UNA

CURVA, ASSOCIANDO UNA COORDINATA CURVILINEA

si ottiene

NON-INVERTIBILE

Mappe 1-D

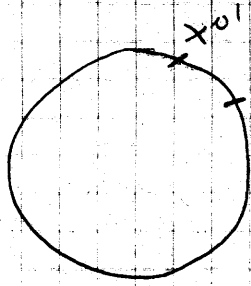
$$x_{n+1} = F(x_n)$$

Mappa di primo ritorno

- CAOS DETERMINISTICO -

(4)

Per sistemi NON CAOTICI una piccola deviazione delle condizioni iniziali resta LIMITATA per $t \rightarrow \infty$



$$\Delta x^N = c \delta \epsilon \quad \forall \epsilon$$

ORBITA PERIODICA

MAGRE



$$\Delta x^N \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

PTO FISSO

UN SISTEMA MOSTRA SENSIBILITÀ ALLE CONDIZIONI INIZIALI SE

$t=0 \quad \underline{x}'_0 = \underline{x}_0 + \delta \underline{x}_0 \quad \delta \underline{x}_0$ PICCOLE ERRORE INIZIALE

$$\begin{cases} \underline{x}_1 = F(\underline{x}_0) \\ \underline{x}'_1 = F(\underline{x}'_0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta \underline{x}_1 &= \underline{x}'_1 - \underline{x}_1 = F(\underline{x}_0 + \delta \underline{x}_0) - F(\underline{x}_0) = \\ &\approx \cancel{F(\underline{x}_0)} + \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \delta \underline{x}_0 - \cancel{F(\underline{x}_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \delta \underline{x}_1 = D F \delta \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \delta \underline{x}_n = (D F^n) \cdot \delta \underline{x}_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta \underline{x}_n &= \underline{x}'_n - \underline{x}_n = F^n(\underline{x}'_0) - F^n(\underline{x}_0) \\ &= D F^n \delta \underline{x}_0 \end{aligned}$$

$$\|\delta \underline{x}_n\| \sim \lambda^n \|\delta \underline{x}_0\| \quad \text{SE } \lambda > 0 \quad \boxed{\text{SIC}}$$

questa proprietà è conservata o alterata

VARIETA' STABILI e INSTABILI -

(5)

ATTIRAZIONE di STALE

• **BIF** → lungo x la costante caddoppia



La distanza fra z e lungo x

CRESCe in modo ESPONEZIONALE

$$\Delta x_{n+1}^p = z \cdot \Delta x_n = e^{\lambda z} \Delta x_n$$

$$\Delta x_{n+1} = z^n \Delta x_0 = e^{n \lambda z} \Delta x_0$$

$$\lambda = \ln z > 0$$

•• CONTRAZIONE
dei VOLUMI

$$\Delta x_{n+1} \cdot \Delta y_{n+1} = \frac{1}{\eta} \Delta x_n \cdot \Delta y_n$$

$$\eta > 1 \quad |S| < 1 = \frac{1}{\eta}$$

{ Lungo x si HA DIVERGENZA delle ORBITE
VARIETA' INSTABILE

{ Lungo y si HA CONTRAZIONE delle ORBITE
VARIETA' STABILE

L'ATTIRAZIONE di STALE è **IPERBOLICO** !!!

perché le VARIETA' STABILI
e INSTABILI sono SEMPRE TRASVERSALI

AUTO-SIMILITÀ -

Spesso gli ATTRAZIONI STABILI hanno proprietà di AUTO-SIMILITÀ, cioè associate con RISOLUZIONI DIVERSE presentano sempre la STESSA STRUTTURA - [ОБЪЕКТ, ФРАКТАЛ]

② Date 2 COND. INIZIALI del TUTTO INDISTINGUIBILI a LIVELLO della RISOLUZIONE USATO, dato da divergono ^{legge la det. esponente} esponenzialmente, dopo un certo tempo la loro SEPARAZIONE DIVIENE IRREVERSIBILE dagli STRUMENTI di MISURA: cioè realtà da uno STESSO STATO INIZIALE dia luogo a EVOLUZIONI del TUTTO DIVERSE *

③ Dal pto di vista della TEO. dell'INFORMAZIONE si può dire che in MOTO CAOTICO si creata realtà da una COSTANTE "PERDITA" D'INFORMAZIONE nella STATO ATTUALE del SISTEMA - CREAZIONE DI INFORMAZIONE SO 2 PIÙ VICINI ENTRO LA RISOLUZIONE

come distinguere un SEGNALE STOCASTICO da un SEGNALE CAOTICO?

ESPOONENTI DI LYAPUNOV

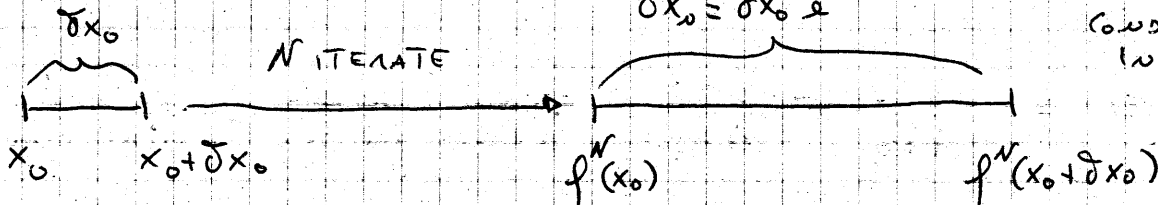
6

- MAPPA AD -

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

SISTEMA CAOTICO

SENSIBILITÀ ALLE CONDIZIONI INIZIALI



$$\delta x_N = |f^N(x_0 + \delta x_0) - f^N(x_0)| \quad \text{DISTURBO al TEMPO } N$$

VUOLGO STIMARE L'ESPONENTE DI LYAPUNOV

$$|\delta x_N| = |\delta x_0| e^{N\lambda} \quad f^N(x_0 + \delta x_0) \approx f^N(x_0) + \frac{d}{dx_0} f^N \delta x_0$$

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\delta x_N}{\delta x_0} \right| = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \delta x_0) - f^N(x_0)}{\delta x_0} \right|$$

$$\approx \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\partial (f^N(x_0))}{\partial x_0} \right| \quad \text{Def. ESATA}$$

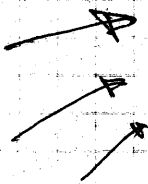
$\delta x_0 \rightarrow 0$

$N \rightarrow \infty$

o PRIMA IL LIMITE $\delta x_0 \rightarrow 0$, PERTURBAZIONE INFINITESIMA, TANGENTE LINEARE

o DOPO IL LIMITE $N \rightarrow \infty$, COSÌ DA

MEDIARE LUNGO L'ORBITA E RENDERE INDIPENDENTE DALLA COND. INIZIALE (A STIMA di λ)



- CHAIN RULE -

- SPAZIO TRAIETTORIE -

HO GIÀ FATTO LIMITE
 $\delta x_0 \rightarrow 0$

$$x_{N+1} = F(x_N) =$$

$$x_N = F(x_{N-1}) = F^N(x_0) \quad \frac{dx_N}{dx_{N-1}} = F'(x_{N-1})$$

$$x_{N-1} = F(x_{N-2}) = F^{N-1}(x_0) \quad \frac{dx_{N-1}}{dx_{N-2}} = F'(x_{N-2})$$

$$\frac{dF^N(x_0)}{dx_0} = \frac{dx_N}{dx_0} = \frac{dx_N}{dx_{N-1}} \cdot \frac{dx_{N-1}}{dx_{N-2}} \cdot \frac{dx_{N-2}}{dx_{N-3}} \cdots \frac{dx_2}{dx_1} \frac{dx_1}{dx_0} =$$

$$= F'(x_{N-1}) F'(x_{N-2}) \cdots F'(x_1) F'(x_0)$$

$$\frac{dF^N}{dx_0}(x_0) = \prod_{j=0}^{N-1} F'(x_j)$$

~ ~

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{dF^N}{dx_0} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{j=0}^{N-1} F'(x_j) \right| =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln |F'(x_j)|$$

MASSIMO
ESPOLENTE
di LYAPUNOV

L. DEFINITO CON UNA MEDIA NEL TEMPO

LUNGO UNA TRAIETTORIA

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_N$$

GRAZIE AL TEOREMA ERGODICO

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} H[x_a] = \int H(x) \rho(x) dx$$

MISURA INVARIANTE
o MISURA NATURALE

<< INVARIANT MEASURE >>

$$x^{n+1} = F(x^n)$$

$$\mu[F^{-1}(B)] = \mu(B) \quad \forall \text{ MEASURABLE SET}$$

↓

THE MEASURE of B AND of ITS PRE-IMAGE

$$f^{-1}(B) \equiv \{x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x) \in B\}$$

SHOULD COINCIDE!!!

NATURAL (PHYSICAL) DENSITY

$\rho(x)$ NATURAL DENSITY emerging by
CHOOSING ANY INITIAL CONDITION
(not UNSTABLE PERIODIC ORBIT)

$\rho(x) \rightarrow$ HISTOGRAM of the orbit
 $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$

- ρ EXHIBITS MANY SINGULARITIES, WE
CANNOT SPEAK of a DENSITY

⇓

Def MEASURE

$$\left\{ \begin{array}{l} d\mu(x) = \rho(x) dx \\ \mu \text{ IS DIFFERENTIABLE EVERYWHERE (ALMOST)} \end{array} \right.$$

$$\rho \left[\mu = \int \rho dx \right] !!$$

$$H = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{dF}{dx} \right|$$

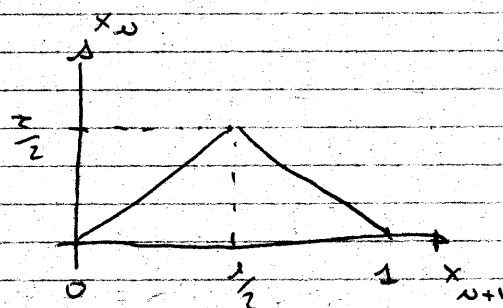
(7)

$$\left\{ \begin{aligned} \langle K \rangle &= \int \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{dF(x)}{dx} \right| g(x) dx && \text{MEDIA SU TUTTE LE} \\ &&& \text{POSSIBILI COND. INIZIALI} \\ g(x) & \text{ MIS. NATURALE della MAPPA} \end{aligned} \right.$$

$$\langle K \rangle = \frac{\text{MEDIA LUNGO UN NATURALEDORIA}}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dF}{dx}} = \frac{\text{MEDIA SU TUTTE LE POSSIBILI COND. INIZIALI}}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dF}{dx}}$$

- MAPPA A TENDA -

$$F(x) = \begin{cases} \tau x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \tau(1-x) & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$



$$F'(x) = \begin{cases} +\tau & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\tau & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot N \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \tau = \tau$$

CAOTICA
per
 $\tau > 1$

$$\boxed{K = \lim_{N \rightarrow \infty} \tau > 0 \quad \forall x_0}$$

$$\tau > 1$$

FARE ES. 10.5.1 - 10.5.2 p 393 !

- Spettro di Esponenti di Lyapunov -

- Mappa del Forno - Baker's Map

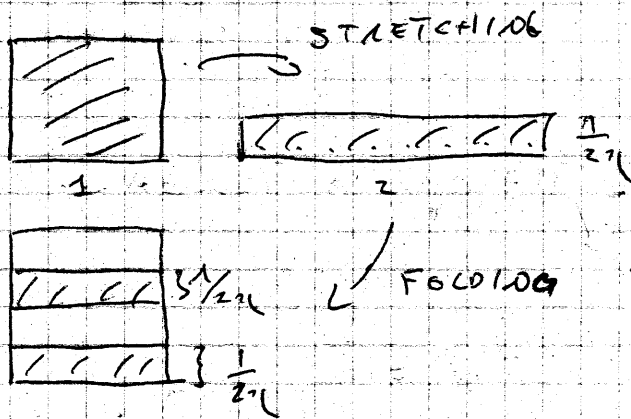
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \underline{F} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_n) \\ F_y(y_n) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_{n+1} = 2x_n \pmod{1} \\ y_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}y_n & 0 \leq x_n < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_n & \frac{1}{2} \leq x_n < 1 \end{cases} \end{matrix} \quad \text{BS}$$

S.F.C

$$\delta \underline{x} = (\delta x, \delta y)$$

$$\underline{x}'_0 = \underline{x}_0 + \delta \underline{x}_0$$

$$\begin{cases} \underline{x}'_1 = \underline{F}(\underline{x}'_0) \\ \underline{x}'_2 = \underline{F}(\underline{x}'_1) \end{cases}$$



$$\delta \underline{x}_1 = D\underline{F} \delta \underline{x}_0$$

$$\delta \underline{x}_N = D\underline{F}^N \delta \underline{x}_0$$

EVOLUZIONE nello Spazio TANGENTE

$$\delta x_N = \lambda_1^N \delta x_0 \quad \text{VARIETA' INSTABILE}$$

$$\delta y_N = \lambda_2^N \delta y_0 \quad \text{VARIETA' STABILE}$$

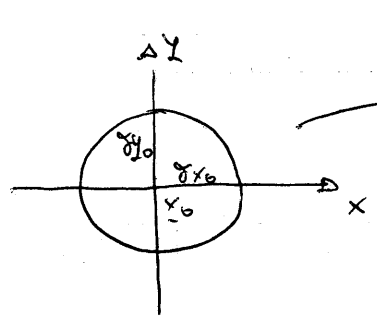
$$D\underline{F} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

E' DIAGONALE

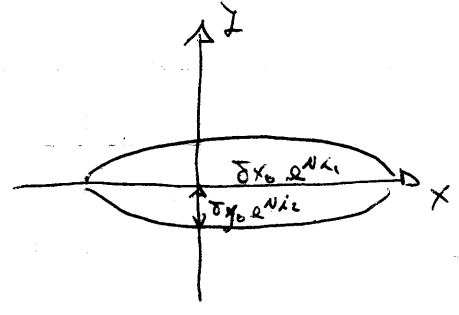
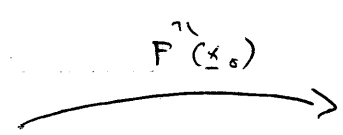
$$\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\partial F_x(x_j)}{\partial x} \right| = \ln 2 > 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\partial F_y(y_j)}{\partial y} \right| = \ln \frac{1}{2} = \\ &= -\ln 2 < 0 \quad \text{se } \gamma > 1 \end{aligned}$$

~~det~~ $|J| = \det |DF| = 2 \cdot \frac{1}{2\eta} = \frac{1}{\eta} < 1$ DISSIPAZIONE



CERCHIO DI ASSI
($\delta x_0, \delta y_0$)



ELLISSOIDE DI SEMI ASSI
($\delta x_0 e^{\lambda_1}; \delta y_0 e^{\lambda_2}$)

$e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}$ AUTOVALORI DI DF MAT. JACOBIANA

$|J| = \det |DF| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} = 2 \cdot \frac{1}{2\eta} = \frac{1}{\eta} < 1$

→ LUNGO LA VARIETA' INSTABILE LE PERTURBAZIONI CRESCONO ESPONENZIALMENTE

→ LUNGO LA VARIETA' STABILE SONO CONTRATTE ESPONENZIALMENTE

UN ELEMENTO INFINITESIMO DI SUPERFICIE

$\delta x_0 \cdot \delta y_0 \xrightarrow{N} e^{N(\lambda_1 + \lambda_2)} \delta x_0 \cdot \delta y_0$

IN QUESTO CASO E' CONTRATTO nel TEMPO

~~...~~ $e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} = \frac{1}{\eta} < 1$

QUALE DIMENSIONE HA L'ANTENNA?

◦ ELEMENTI DI SUPERFICIE SONO CONSERVATI



$$\delta A = \delta A_0 \cdot (1 + \epsilon) N$$

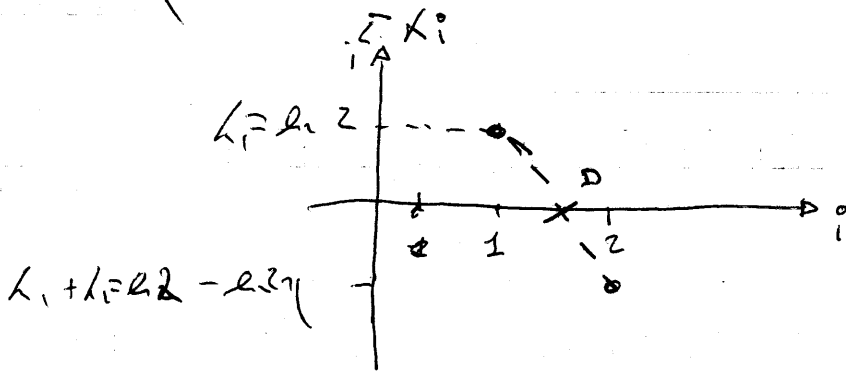
$$D < 2$$

◦◦ ELEMENTI DI LINEA SONO ESPANSI $\delta L = \delta L_0 \cdot \epsilon^{1/N}$



$$D > 1$$

$D \rightarrow$ È LA DIMENSIONE PER CUI ELEMENTI (BODILARIACI) CON DIM. D SONO CONSERVATI SULLO STRETTORE!!



D VALORE DELLA DIM. SPAZIO PER "VOCALI" DI DIMENSIONE V SONO CONSERVATI

$$\delta S \approx \delta S_0$$

INTERPOLAZIONE LINEARE PER CALCOLARE D

$$\frac{D-1}{0-K_1} = \frac{2-1}{K_1+K_2-K_1}$$

$$D = 1 - \frac{K_1}{K_2} = 1 + \frac{K_1}{1 \cdot K_2}$$

RELAZIONE DI HAPCAU-YORRE FAX

DIM. FRATTALE ED ESPANSI DI LYAPUNOV!!

$$D = 1 + \frac{1.2}{1.271}$$

$$\eta = \frac{1}{8} \Rightarrow D = 1.5!!!$$

- Mappe A: ~~Mappe~~ M -DIMENSIONI -

9

Hip) $t=0$ SFERA di RAGGIO δ_0 in M -DIMENSIONI

questo evolve in un ELLIPSOIDE in un tempo N
 e cui SEMI-ASSI sono dati da:

$$\delta_H \approx \delta_0 e^{N \lambda_H} \quad \delta \rightarrow 0$$

ove δ_H è la COMPONENTE dell'ELLIPSOIDE
 lungo la H -ESITA VARIETA' (de può essere
 stabile o instabile) -



Spettro degli
 esponenti
 di Lyapunov

$$\{ \lambda_H \} \quad H=1, \dots, M$$

Mappe =

↳ SISTEMI DISSIPATIVI $\sum_{H=1}^M \lambda_H < 0$

- DEFINIZIONE PIU' RIGOROSA -

$$\begin{cases} \underline{x}_{N+1} = \underline{F}(\underline{x}_N) & \delta \underline{x}_N \text{ PERTURBAZIONE} \\ & \text{di } \underline{x}_N \\ \delta \underline{x}_{N+1} = \underset{\text{"}}{\underline{D}\underline{F}(\underline{x}_N)} \cdot \delta \underline{x}_N & \underline{x}_N = \text{ORBITA } \underline{x}_0 \\ & \underline{D}\underline{F}^N(\underline{x}_0) \cdot \delta \underline{x}_0 & \text{PERTURBATA} \end{cases}$$

$\delta \underline{x}_N \rightarrow$ VETTORE TANGENTE
 ALL'ORBITA

$$\delta x_{-N+1} = \left[\prod_{j=0}^{N-1} D \underline{F}^{\circ}(x_j) \right] \delta x_0 \text{ CHIAMO ROCCO} = D \underline{F}^N(x_0) \delta x_0$$

Definiamo il VETTORE di Lyapunov $L_{N,0}$

la DIREZIONE INIZIALE $\underline{u}_0 = \delta x_0 / |\delta x_0|$

$$L_{\underline{u}_0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln |D \underline{F}^N(x_0) \cdot \underline{u}_0|$$

A SECONDA della DIREZIONE \underline{u}_0 SCELTA $L_{N,0}$

è degli (H) Lyapunov

Hyp) $N \gg 1$

$$L_{\underline{u}_0} \approx \bar{L}_{\underline{u}_0} \equiv \frac{1}{N} \ln |D \underline{F}^N(x_0) \cdot \underline{u}_0| =$$

$$= \frac{1}{2N} \ln \left[\underline{u}_0^+ H_N(x_0) \underline{u}_0 \right] \left[\begin{array}{l} \exists \text{ IL LIMITE} \\ N \rightarrow \infty ? \\ \text{TEO. di OSBLEDER} \end{array} \right]$$

$$H_N(x_0) = [D \underline{F}^N(x_0)]^+ \cdot D \underline{F}^N(x_0)$$

+ AGGIUNTA della
MATRICE

(H_N) + MATRICE REALE NON
NEGATIVA

↓ TRASPOSTA
SCOMPOSTA

(H_N) + + MATRICE AUTO-AGGIUNTA
 $A^+ = A = \overline{A^E}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

⇓
* AUTOREALORI REALI NON-NEGATIVI

* AUTOREALORI REALI

$\{h_{3N}\} \rightarrow$ AUTOVALORI di $H_N(x_0)$
 \Leftrightarrow AUTOVECTORI - BASE ORTONORMALE

VALORI APPROSSIMATI degli ESPONENTI di LYAPUNOV
 $\lambda_j = \frac{1}{2N} \ln h_{3N} \quad j=1, \dots, M$
 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots > \lambda_M$

SCEGLIENDO \underline{u}_0 DIRETTO LUNGO L'AUTOVETORE
 $\underline{u}_0 \Rightarrow$ TAVOLA $h_{3N} \Rightarrow \lambda_M$

ATTENZIONE

$\{ \underline{e}_j \}$ BASE ORTONORMALE $H_N(x_0)$

Una generica distorsione \underline{u}_0 con componenti lungo tutti gli autovettori

$$\underline{u}_0 = \sum_{j=1}^M a_j \underline{e}_j$$

\Downarrow

$$\underline{u}_0^T H_N(x_0) \cdot \underline{u}_0 = \sum_{j=1}^M a_j^2 e^{2N \lambda_j} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} a_1^2 e^{2N \lambda_1}$$

$N \rightarrow \infty$ PRIMA λ_1 , GLI ALTRI SONO TRASCURABILI

\Downarrow

\underline{u}_0 SI ALLINEA a \underline{e}_1

k_2

Per trovare k_2 due conclusioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_0 \perp \underline{x}_1 \\ \underline{x}_0 \text{ sottospazio ortogonale a } \underline{x}_1 \end{array} \right.$$



$$\underline{x}_0^T \cdot H_N(\underline{x}_0) \underline{x}_0 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N k_{ij} \underline{x}_0$$

\underline{x}_0 si allinea all'autovettore
più espandente \underline{x}_2

etc.

~~PROBLEMA~~

- CONGETTURA di KARLON-MORSE -

$$H_p) \left\{ \begin{array}{l} \text{SISTEMA DISSIPATIVO e CAOTICO } k_1 > 0 \\ \mu\text{-DIM} \end{array} \right.$$



$$\begin{array}{l} \bullet \{ k_j \} \quad j=1, \dots, \mu \quad \text{esp. } \underline{e}_j \text{ p. } \underline{e}_j \\ \bullet \sum_{j=1}^{\mu} k_j < 0 \end{array}$$

SISTEMI DISSIPATIVI

Pt₀ FISSO STABILE $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots$

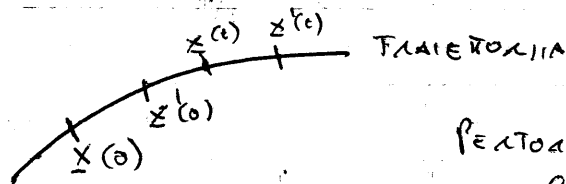
CICLO LIMITE $\lambda_1 = 0 \quad 0 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots$

TORO Tⁿ $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \quad 0 > \lambda_{n+1} > \lambda_{n+2} > \lambda_{n+3} \dots$

CAOS (ALMENO $\lambda_1 > 0$)

SISTEMI AUTONOMI CONTINUI SENZA PT FISSI STABILI
 ALMENO 1 EXP. LYAPUNOV $\equiv 0$

NOTO LO SCO LA TRAIETTORIA
 NON E' CONTINUA / NE' ESPANSO



RETTOANGOLO TANGENTE
 LA TRAIETTORIA

Se e' HAMILTONIANO

COPIA di LYAPUNOV

$\lambda = 0$

L

L

Come visto prima:

Un elemento di linea

$$\delta L \sim \delta_0 \epsilon^{k_1 N}$$

Un elemento di superficie

$$\delta A = \delta A_0 \epsilon^{(k_1+k_2) N}$$

Un elemento di volume

$$\delta V = \delta V_0 \epsilon^{(k_1+k_2+k_3) N}$$

⋮

NOTA

$\sum_{i=1}^M k_i = 3$ CONTINUO

$\langle \text{rel. vol.} \rangle \ll 1 \Rightarrow$ DISCRETO

Ad un certo punto esiste (k) :

$$\sum_{j=1}^k k_j \gg 0 \quad \text{ma} \quad \sum_{j=1}^{k+1} k_j < 0$$

elementi di DIMENSIONE k ESPANSI,
elementi di DIMENSIONE $k+1$ CONTRATTI

\Downarrow

INTERPOLAZIONE LINEARE

$$D_{HY} = k + \frac{\sum_{j=1}^k k_j}{|k_{k+1}|}$$

DIM. АТЛАНТОЛЕ

D_{HY} LIMITE SUPERIORE per

la DIMENSIONE FRATTALE dell' АТЛАНТОЛЕ.