CHAOS

SESTO 15/12/2011

$\boxed{\text{IL CAOS È DETERMINISTICO}}$

NON È POSSIBILE PREVEDERE L'EVOLUZIONE DI UN SISTEMA DI CUI CONOSCO LE CONDIZIONI INIZIALI <u>IN MODO APPROSSIMATO</u>

→ SENSIBILITÀ alle CONDIZIONI INIZIALI

⇓

- UN PICCOLO "ERRORE" NELLE CI ESPLODE RAPIDAMENTE
- RAPIDA PERDITA DI MEMORIA RIGUARDO ALLE CONDIZIONI INIZIALI

→ ALLUNGAMENTO LUNGO ALCUNE DIREZIONI

STRETCHING

→ L'ORBITA DEVE RESTARE CONFINATA IN UNA REGIONE FINITA DI SPAZIO delle FASI

ATTRATTORE

⇓

→ RIPIEGAMENTO DELLE ORBITE

SISTEMA DISSIPATIVO

- I VOLUMI SI CONTRAGGONO nello SP. FASI

⇓

ATTRATTORI STRANI

SISTEMA DISSIPATIVO

TEOREMA di LIOUVILLE

$$\rho = M/V \qquad \underline{\dot{x}} = \underline{F}(\underline{x})$$

$$\left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \, \underline{\nabla} \cdot \underline{F} = 0 \right]$$

SISTEMA DISSIPATIVO $\quad \underline{\nabla} \cdot \underline{F} < 0 \quad$ [ATTRITO GENERALIZZATO]

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\nabla} \cdot \underline{F} = \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \dot{z}}{\partial z} = Tr(J) < 0 \\ \delta \underline{\dot{x}} = J \, \delta \underline{x}_0 \\ \left\{ \begin{array}{l} J_{ij} = \partial \dot{x}_i / \partial x_j \\ \text{JACOBIANO} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

SISTEMA CONTINUO

SISTEMA CONSERVATIVO $\quad \underline{\nabla} \cdot \underline{F} = 0 \quad$ V delle cond. iniziali è conservato

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}^{n+1} = \underline{F}(\underline{x}^n) \\ \delta \underline{x}^{n+1} = D\underline{F} \, \delta \underline{x}^n \\ \det \| D\underline{F} \| < 1 \\ \phantom{\det \| D\underline{F} \|} = 1 \end{array} \right.$$

SISTEMA DISCRETO

$\det \| D\underline{F} \| < 1$ SISTEMA DISSIPATIVO

$= 1$ " CONSERVATIVO

DIAGNOSTICA del CAOS

SPETTRO DI POTENZA

$u(t)$ SEGNALE TEMPORALE <u>REALE</u>

1) VALOR MEDIO $\quad \bar{u} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, dt$

Ridefinisco una nuova variabile a
VALOR MEDIO NULLO
$u(t) - \bar{u}$

2) PER MISURARE LA <u>MEMORIA</u> DEL SEGNALE
CALCOLO LA FUNZIONE DI
AUTOCORRELAZIONE del SEGNALE

$$C(\tau) = \langle u(t)\, u(t+\tau) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, u(t+\tau)$$

$$\parallel$$

$$C(-\tau)$$

<u>SE</u> $\quad \langle u(t)\, u(t+\tau) \rangle \to \langle u(t) \rangle \langle u(t+\tau) \rangle \to 0$
$\tau \to \infty$

IL SEGNALE SI DECORRELA

$$\lim_{\tau \to \infty} C(\tau) = 0$$

A TEMPI LUNGHI HO UNA PERDITA
DI MEMORIA

• QUESTA È UNA INDICAZIONE di CAOS

SEGNALE PERIODICO $C(\tau)$ OSCILLA

PUNTO FISSO $C(\tau) =$ COSTANTE

3) Spettro di potenza del segnale

Sperimentalmente si ha accesso allo spettro di potenza che è la sua F.T.

$$P(\omega) = \lim_{T\to\infty} \left| \int_0^T \frac{dt\, x(t)\, e^{i\omega t}}{T} \right|^2$$

e dal TEO. di WIENER-KHINCHIN

$$P(\omega) = 2 \int_0^\infty d\tau\, C(\tau) \cos\omega\tau$$

e quindi conoscere lo spettro di potenza è come conoscere la f. di correlazione

$$C(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \cos(\omega\tau)\, P(\omega)$$

Se $P(\omega)$ è CONTINUA INTEGRABILE $\Rightarrow \lim_{\tau\to\infty} C(\tau) = 0$

IL FATTO CHE $P(\omega)$ è una "BUONA FUNZIONE" è
EQUIVALENTE
al FATTO che LA CORRELAZIONE VADA A ZERO!

$P(\omega)$ NON HA DEI PICCHI TIPO δ-DIRAC

[SEGNALE QUASIPERIODICO]

Lo spettro di potenza è fatto di picchi a δ-

Hp) SEGNALE QUASIPERIODICO
TORO T^k
?

$$\begin{cases} u(t) = \sum_{n \neq 0} a_n \, e^{i \underline{n} \cdot \underline{\omega} t} \\ \underline{n} \cdot \underline{\omega} = \sum_{j=1}^{k} n_j \omega_j \quad \begin{cases} \underline{n} \in \mathbb{Z}^k \\ \underline{\omega} \in \mathbb{R}^k \end{cases} \\ a^*_n = a_{-n} \in \mathbb{C} \end{cases}$$

MEDIA $a_0 = 0 = \overline{u}$

SE IL SISTEMA è QUASI-PERIODICO

$\underline{n} \cdot \underline{\omega} = 0 \Rightarrow \underline{n} \equiv 0$

~~...~~ DIM

$$C(\tau) = \frac{1}{\pi} P(\omega) \frac{\sin(\omega\tau)}{\tau}$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty P'(\omega) \frac{\sin(\omega\tau)}{\tau}$$

$$= - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty P' \frac{\sin(\omega\tau)}{\tau} \, d\omega$$

$\downarrow \tau \to \infty$

0

SEGNALE COMPLESSO

Spettro di Potenza

$$P(\Omega) = \lim_{T\to\infty} \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt\, u(t)\, e^{i\Omega t} \right|^2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt\, e^{i\Omega t} \sum_{n\neq 0} a_n e^{i(n\omega)t} \right|^2$$

Def δ.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{ixy} = \delta(x)$$

$$\int_0^{\infty} dy\, e^{ixy} = \pi\delta(x) + i P\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\delta(x) = \int_0^{\infty} dk\, \frac{\cos(kx)}{\pi}$$

La f. di correlazione del segnale è QUASI-PERIODICA

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt\, u(t)\, u^*(t+\tau)\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \sum_{n\neq 0} a_n e^{in\omega t} \sum_{k\neq 0} a_k^* e^{-ik\omega(t+\tau)}$$

Posso ridefinire

$$\begin{cases} t' = t/T & dt' = dt/T \\ \underline{\omega}' = \underline{\omega} \cdot T \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\omega}\, t = \underline{\omega}'\, t'$$

$$c(\tau) = \int_0^\infty dt' \sum_{n\neq 0} a_n\, e^{i \underline{n}\cdot\underline{\omega}' t'} \sum_{k\neq 0} \underset{\substack{\| \\ a_{-k}}}{a_k^*}\, e^{-i \underline{k}\cdot\underline{\omega}' (t'+\tau')}$$

$$= \pi\, \delta\left[(\underline{n}-\underline{k})\cdot\underline{\omega}'\right] \sum_{n\neq 0} a_n \sum_{k\neq 0} a_k^*\, e^{-i \underline{k}\cdot\underline{\omega}' \tau'}$$

$$= \pi \sum_{k\neq 0} |a_n|^2\, e^{-i \underline{k}\cdot\underline{\omega}\tau} + i\left(\quad\right)$$

Che ha un comportamento ricorsivo e QUINDI NON va a ZERO.

~ ~

Spettro di Potenza

$$P(\Omega) = 2\int_0^\infty d\tau\; c(\tau) \cos\Omega\tau =$$

$$= 2\pi \sum_{k\neq 0} |a_k|^2 \int_0^\infty d\tau\; e^{-i \underline{k}\cdot\underline{\omega}\tau} \cos\Omega\tau =$$

$$= 2\pi \sum_{k\neq 0} |a_k|^2 \int_0^\infty \frac{d\tau}{2} \left(e^{i(\Omega - \underline{k}\cdot\underline{\omega})\tau} + e^{-i(\Omega + \underline{k}\,\underline{\omega})\tau} \right)$$

$$= \pi^2 \sum_{n \neq 0} |a_n|^2 \left[\delta(\Omega - n \cdot \omega) + \delta(\Omega + n \cdot \omega) \right]$$

$P(\Omega)$ è un INSIEME DENSO di PICCHI a δ

$\Downarrow$

NON è una FUNZIONE CONTINUA

[SEGNALE DECORRELATO]

Se

$$\begin{cases} c(\tau) = A\, e^{-\gamma|\tau|} \\ 1/\gamma = \text{MEMORIA del PROCESSO} \end{cases}$$

$\Downarrow$

Spettro di POTENZA LORENTZIANO

$$P(\Omega) = 2 \frac{\gamma}{\gamma^2 + \Omega^2}$$

IL CASO CAOTICO HA

1) $C(\tau) \to 0$ per $\tau \to \infty$

2) Spettro di potenza continuo (e integrabile)

Rumore Bianco

$$\boxed{\begin{array}{c} P(\omega) = \text{costante} \\ C(\tau) = A \cdot \delta(\tau) \\ \text{QUESTO È IL CASO MASSIMAMENTE DECORRELATO} \end{array}}$$

Sperimentalmente

Spettro continuo + picchi

CAOS

Risonanze FREQ. Proprie