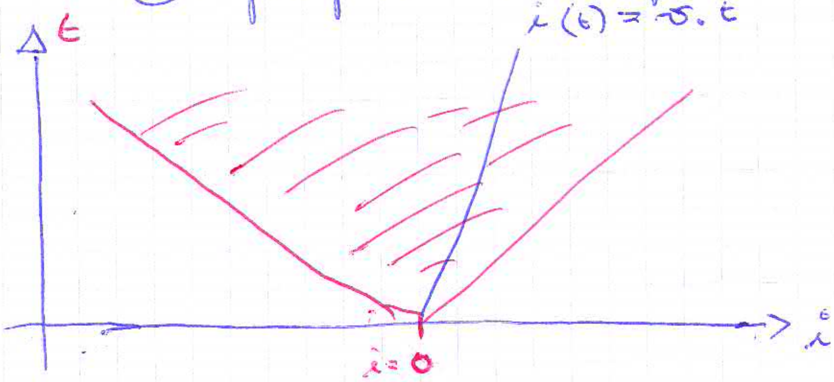
Comoving Lyapunov exponent

- Sistemi caotici spazialmente estesi una perturbazione:

  (1) cresce nel tempo

  (2) propaga nello spazio



Perturbazione iniziale

$$\begin{cases} \delta X_0^0 = \delta_0 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

- Propagazione lungo la linea spazio-temporale

$$i(t) = [v \cdot t]$$

$$|\delta X_t^i| = \delta_0 \cdot e^{\Lambda(v = i/t) \cdot t}$$

$$\Lambda(v) = \lim_{t \to \infty} \lim_{L \to \infty} \lim_{\delta_0 \to 0} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta X_t^{[vt]}}{\delta_0} \right|$$

L'ORDINE DEI LIMITI è IMPORTANTE
per EVITARE gli EFFETTI di BORDO!

SISTEMI CHIUSI / COND. PERIODICHE al CONTORNO

$$\Lambda(\nu) = \Lambda(-\nu)$$

Hp approx) 1) LA PERTURBAZIONE CRESCE ESPONENZIALMENTE CON λ_{MAX}
2) DIFFONDE SPAZIALMENTE IN MODO DIFFUSIVO

EFFETTO DIFFUSIVO
$f' = \tau = 1$ NON HO L'INSTABILITÀ DOVUTA A λ_{MAX}

$$\delta x^i(t+1) = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\tau}}\left\{(1-\epsilon)\delta x^i(t) + \frac{\epsilon}{2}\left[\delta x^{i-1}(t) + \delta x^{i+1}(t)\right]\right\}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 z = \dfrac{\dfrac{z^{i+1}-z^i}{\Delta x} - \dfrac{z^i - z^{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \underset{\Delta x = 1}{=} -2z^i + z^{i+1} + z^{i-1} \\ \nabla^2 \text{ DISCRETIZZATO} \end{cases}$$

$$\delta x^i(t+1) = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\tau}}\left[\delta x^i(t) + \frac{\epsilon}{2}\nabla^2 \delta x(t)\right]$$

$$\frac{\delta x^i(t+1) - \delta x^i(t)}{\Delta t = 1} = \frac{\epsilon}{2}\nabla^2 x(t)$$

$$\delta \dot{x} = \frac{\epsilon}{2} \nabla^2 x \qquad \text{Eq. DIFFUSIONE}$$

$\Big\downarrow$ FT

$$\delta \dot{\tilde{x}} = -k^2 \frac{\epsilon}{2} \delta \tilde{x}$$

$$\delta \tilde{x}(t) = \delta \tilde{x}(0)\, e^{-k^2 \frac{\epsilon}{2} t}$$

$\Big\downarrow$ ANTI-FT

$$\delta x(t) = \delta \tilde{x}(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-\frac{\epsilon}{2} k^2 t}\, e^{+ikx} =$$

spazio

$$= \delta \tilde{x}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\epsilon}{2} t \left[k^2 - \frac{ix}{\epsilon t} k\right]} \frac{dk}{2\pi} =$$

$$= \delta \tilde{x}_0\, e^{-\frac{x^2}{2\epsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\epsilon}{2} t \left[k - \frac{ix}{\epsilon t}\right]^2} \frac{dk}{2\pi} =$$

$$= \delta \tilde{x}_0 \frac{e^{-x^2/2\epsilon t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{-\frac{\epsilon}{2} t \xi^2} =$$

$$= \delta \tilde{x}_0\, e^{-x^2/2\epsilon t} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon t}} =$$

$$= \delta \tilde{x}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi \epsilon t}} e^{-x^2/2\epsilon t}$$

EFFETTO DI CRESCITA CAOTICA (LOCALE)

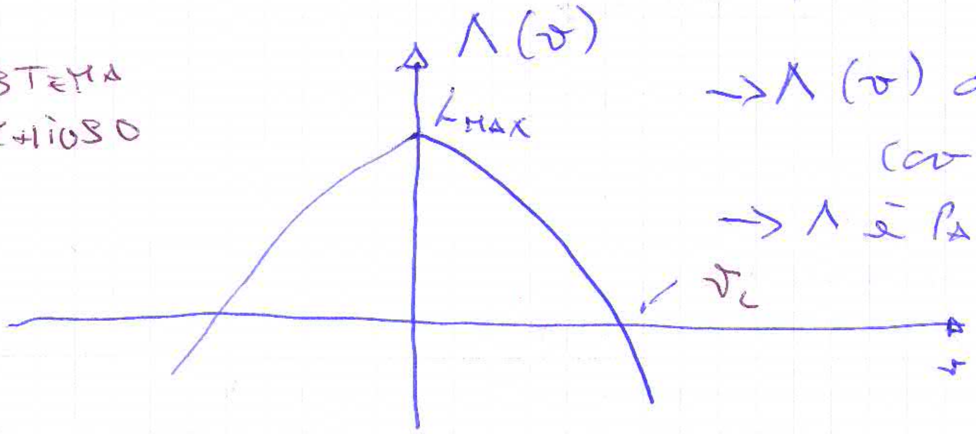
$$\delta x^i(t) \sim e^{\lambda_{MAX} t} \, \delta x^i(0)$$

$$\big|\delta x^i_t\big| \simeq \frac{\delta_0}{\sqrt{2\pi \epsilon t}} \, e^{\left(\lambda_{MAX} t - \frac{\lambda^2}{2\epsilon t}\right)}$$

$$\Lambda(\nu) = \lambda_{MAX} - \frac{\nu^2}{2\epsilon} \qquad \nu = 1/t$$

Approssimazione valida per $\nu \simeq 0$

SISTEMA CHIUSO

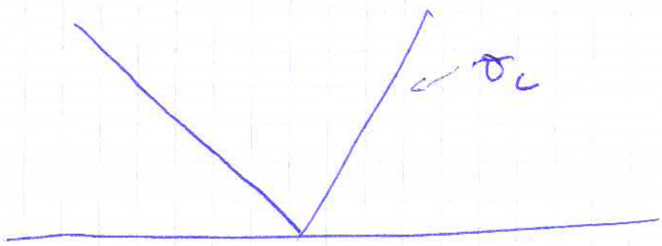


→ $\Lambda(\nu)$ decresce con ν

→ Λ è pari in ν

$$\Lambda(\nu_L) \equiv 0$$

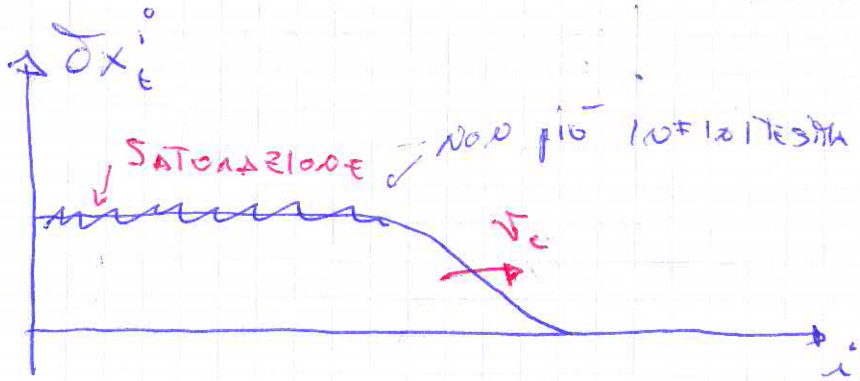
Il criterio di stabilità marginale



Il disturbo propaga in modo da rimanere inalterato nel tempo $\Lambda(v_c) = 0$

- Se $v > v_c$ il disturbo è dampato e svanisce $\Lambda(v) < 0$

- Se $v < v_c$ il disturbo satura $\Lambda(v) > 0$

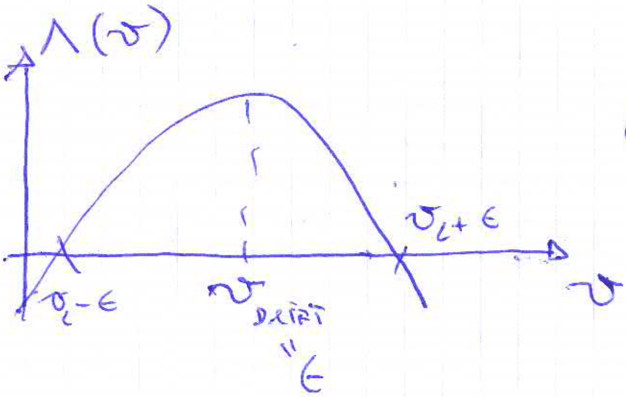


. La leading edge ha un decadimento esponenziale

$$\delta x_t^i \sim e^{-\mu i}\, \delta x_t^0$$

– SISTEMA APERTO ASIMMETRICO –

$$x^k_{n+1} = (1-\epsilon)\, f(x^k_n) + \epsilon\, f(x^{k-1}_n)$$



$\epsilon > v_L$

$v = 0 \quad \Lambda(0) < 0$ SISTEMA STABILE

$$\Lambda(\underset{\epsilon}{\underset{\parallel}{v_{DRIFT}}}) = \lambda_{MAX} \quad \text{(SINGOLA MAPPA)}$$

INSTABILITÀ CONVETTIVA

Lyapunov exponent ~~spaziale~~ con profilo spaziale esponenziale

Hp) profilo spaziale decade spazialmente

$$\Downarrow$$

$$\delta x_i \sim e^{-\mu i}\, \delta x_0$$

- Impongo questo nello spazio tangente

$$\delta x_i(t) = \phi_i(t)\, e^{-\mu i}$$

$$\phi_i(t+1) = \tau\left[\frac{\epsilon}{2} e^{\mu}\phi_{i-1}(t) + (1-\epsilon)\,\phi_i(t) + \frac{\epsilon}{2} e^{-\mu}\phi_{i+1}(t)\right]$$

DS

Ne calcolo gli usuali Lyapunov exponent

$$\delta x_i(t) \sim e^{\Lambda(\mu)t - \mu i}\, \delta x_0(0)$$

Come si legano agli esponenti comoving?

$$\rightarrow \delta u_{i+n}(t) \sim e^{\lambda(\mu)t}\, e^{-\mu n}\, \delta u_i(0)$$

$$\rightarrow \delta u_{i+n}(t) \sim \delta u_0(0)\, e^{\Lambda\left(\frac{i+n}{t}\right)t} \simeq$$

$$\simeq \delta u_0(0)\, e^{\Lambda(i/t)t + \frac{\partial\Lambda}{\partial v}\cdot\left(\frac{n}{\cancel{t}}\right)\cancel{t}}$$

$$H(p)\begin{cases} n \ll i \\ t \gg 1 \end{cases} \qquad \left[v = i/t\right]$$

$$\Lambda\left(\frac{i+1}{t}\right) \sim \Lambda\left(i/t\right) + \frac{\partial\Lambda}{\partial v}\frac{1}{t} \qquad v = i/t$$

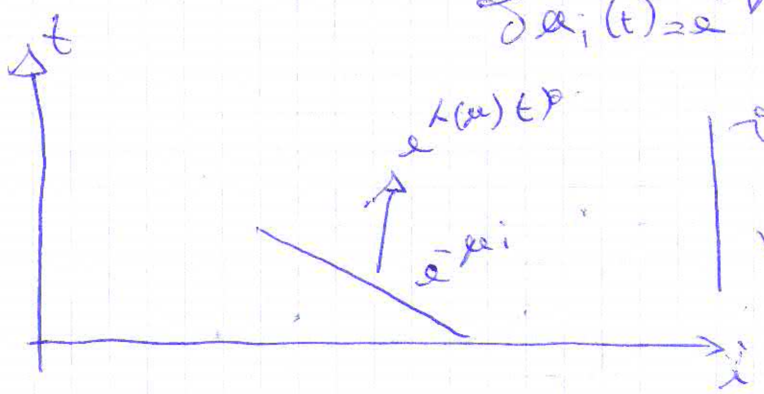
$$\left\lfloor\ \mu = -\partial\Lambda/\partial v\ \right\rceil$$

$$\delta u_i(t) = e^{\Lambda(i/t)t}\, \delta u_0(0) =$$

$$= e^{\lambda(\mu)t - \mu i}\, \delta u_0(0)$$

$$\begin{cases} \left[\Lambda(v) = \lambda(\mu) - \mu\, i/t = \lambda(\mu) - \mu\cdot v \qquad v = d\lambda/d\mu\right] \\ \left[\lambda(\mu) = \Lambda(v) - \frac{\partial\Lambda}{\partial v}\cdot v \qquad \mu = -\partial\Lambda/\partial v\right] \\ \text{TRASFORMATA di LEGENDRE} \end{cases}$$

$$\delta x_i(t) = e^{\lambda(\mu)t - \mu i}\,\delta x_i^0$$



$v(\mu) = \lambda(\mu)/\mu$

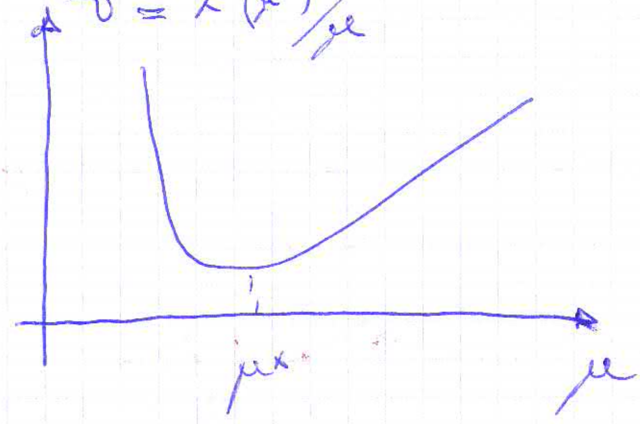
VEL. PROPAGAZIONE del DISTURBO

A COSA CORRISPONDE v_L ?

$$\begin{cases} \Lambda(v_L) = \lambda(\mu) - \mu v_L = 0 \\ v_L = \left.\dfrac{\partial \lambda}{\partial \mu}\right|_{\mu^*} \end{cases}$$

$$v_L = \frac{\lambda(\mu^*)}{\mu^*} = \left.\frac{\partial \lambda}{\partial \mu}\right|_{\mu^*}$$

CHI È μ^* ?



A SECONDA di μ, posso avere VARIE VELOCITÀ di propagazione del DISTURBO, QUALE è QUELLA SELEZIONATA ?

$$v(\mu) = \lambda(\mu)/\mu$$ VEL PROPAGAZIONE del DISTURBO

$$\frac{dv}{d\mu} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu^2} = 0$$

$$\left[\left.\frac{\partial \lambda}{\partial \mu}\right|_{\mu^*} = \frac{\lambda}{\mu^*} = v_L \right]$$

La VELOCITÀ SELEZIONATA dal CRITERIO di ~~...~~ STABILITÀ MARGINALE è QUELLA **MINIMA** !!!

[VELOCITÀ DI PROFILI ESPONENZIALI]