Spettro di Lyapunov di sistemi estesi

$$x^k_{n+1} = (1-\epsilon) F[x^k_n] + \frac{\epsilon}{2}\left[F[x^{k-1}_n] + F[x^{k+1}_n]\right]$$

$k = 1, \dots, L$

Cond. periodiche al contorno

$$\begin{cases} x^{L+1}_n = x^1_n \\ x^0_n = x^L_n \end{cases}$$

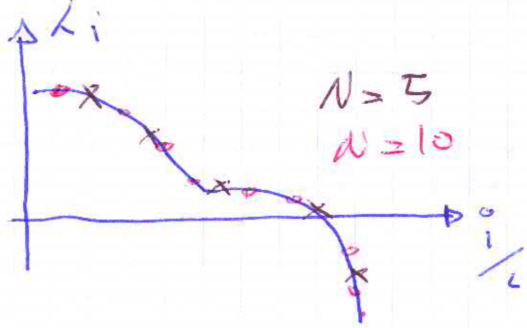
Hp) $L < \infty \Rightarrow$ CML ha una dimensione finita e LE / KS entropy e dim. frattale sono ben definiti

Ruelle (1982) dice che per avere una descrizione statistica del caos spaziotemporale
$\Downarrow$
la fenomenologia del sistema non può dipendere da L e quindi

N.B. Nel limite $L \to \infty$ LE, possono dipendere dalla norma scelta !!!

deve esistere una FORMA UNIVERSALE dello SPETTRO di LYAPUNOV cioè

$$\lim_{L \to \infty} \lambda_i(L) = \Lambda\left(\rho = i/L\right)$$



⊥ CALCOLO ANALITICO $\Lambda(\rho)$ - BERNOULLI SHIFT ⊥

Per il calcolo dello spettro di Lyapunov debbo considerare l'evoluzione nello SPAZIO TANGENTE delle CML

$$\delta x^{k}_{n+1} = (1-\epsilon) F'(x^{k}_{n})\, \delta x^{k}_{n} + \frac{\epsilon}{2}\left[F'(x^{k-1}_{n})\, \delta x^{k-1}_{n} + F'(x^{k+1}_{n})\, \delta x^{k+1}_{n}\right]$$

$$\begin{pmatrix} \delta x^{1}_{n+1} \\ \delta x^{2}_{n+1} \\ \vdots \\ \delta x^{L}_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\epsilon & \epsilon/2 & 0 & \cdots & \epsilon/2 \\ \epsilon/2 & (1-\epsilon) & \epsilon/2 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon/2 & (1-\epsilon) & \epsilon/2 & \cdots \\ \epsilon/2 & 0 & \cdots & \epsilon/2 & (1-\epsilon) \end{pmatrix}}_{A_\epsilon} \cdot D_n \cdot \begin{pmatrix} \delta x^{1}_{n} \\ \delta x^{2}_{n} \\ \vdots \\ \delta x^{L}_{n} \end{pmatrix}$$

$$D_n = \begin{pmatrix} F'(x^1_n) & 0 & & \\ 0 & F'(x^2_n) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F'(x^L_n) \end{pmatrix}$$

Cerco l'esponente di Lyapunov λ massimo

$$\begin{cases} e^{\lambda(N+1)}\, \underline{\delta x}_{N+1} = (A_\epsilon D_N)(A_\epsilon D_{N-1}) \cdots (A_\epsilon D_1)\, \underline{\delta x}_0 \\ \underline{\delta x}_0 = \text{vettore delle perturbazioni infinitesime iniziali} \end{cases}$$

Hp) $F(x) = 2x \,|\, \text{mod } 1$ Bernoulli shift

$$\Downarrow$$

$$F'(x) = 2 \quad \forall x$$

Lo spazio tangente diventa

$$\underline{\delta x}_{N+1} = (2\, A_\epsilon\, \mathbb{1}) \cdot \underline{\delta x}_N$$

Debbo risolvere il problema agli autovalori della matrice

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} (1-\epsilon) & \epsilon/2 & 0 & \cdots & \epsilon/2 \\ \epsilon/2 & (1-\epsilon) & \epsilon/2 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon/2 & (1-\epsilon) & \epsilon/2 \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ \epsilon/2 & 0 & \cdots & \epsilon/2 & (1-\epsilon) \end{pmatrix}$$

A_ϵ è una MATRICE TRIDIAGONALE CICLICA

— ∘ —

PROBLEMA COMPLETO agli AUTOVALORI

$$\begin{cases} e^{\lambda_p} \underline{\omega}_p = \tau A_\epsilon \underline{\omega}_p \\ \left(\frac{e^{\lambda_p}}{\tau}\right) \underline{\omega}_p = A_\epsilon \underline{\omega}_p \end{cases}$$

Risolvo gli AUTOVALORI di A_ϵ ed è FATTA!

A_ϵ commuta con la MATRICE di TRASLAZIONE T

$$T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_L \\ v_1 \end{pmatrix}$$

NON CAMBIA IL MODULO del VETTORE (CONSERVA LA NORMA)

$\Downarrow$

[A e T hanno gli STESSI ~~AUTOVALORI~~ AUTOVETTORI] gli AUTOVALORI di T CADONO nel

CERCHIO UNITARIO

$$t_p = e^{i \frac{2\pi}{L}(p)} \qquad p = 0, \dots, L-1$$

. gli AUTOVETTORI di T hanno la FORMA

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t_p \\ t_p^2 \\ \vdots \\ t_p^{L-1} \end{pmatrix} = \underline{\omega}_p$$

se applico A_ϵ a $\underline{\omega}_p$ trovo gli AUTOVALORI

$$A_\epsilon \underline{\omega}_p = a_p \underline{\omega}_p$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_p = (1-\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} t_p + \frac{\epsilon}{2} t_p^{L-1} \\ t_p^L = e^{i \frac{2\pi}{L} p \cdot L} = e^{i 2\pi p} \equiv 1 \end{cases}$$

$$a_p = (1-\epsilon) + \epsilon \left[\frac{t_p + t_p^{-1}}{2} \right]$$

$$a_p = (1-\epsilon) + \frac{\epsilon}{\cancel{2}} \cos\left[\left(\frac{2\pi}{L}\right) p\right] \qquad p = 0, \dots L-1$$

$$\frac{e^{\lambda_p}}{\tau} = a_p \qquad \lambda_p = \ln \tau + \ln a_p$$

$$\lambda_p (L) = \ln \tau + \ln \left[(1-\epsilon) + \frac{\epsilon}{\cancel{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{L} p\right)\right]$$

Nel limite $L \to \infty$ $\quad \rho = p/L$

$$\Lambda(\rho) = \ln \tau + \ln \left[(1-\epsilon) + \frac{\epsilon}{\cancel{2}} \cos(2\pi \rho)\right]$$

DENSITÀ d'ENTROPIA di KOLMOGOROV - SINAI

La relazione di PESIN si può scrivere come

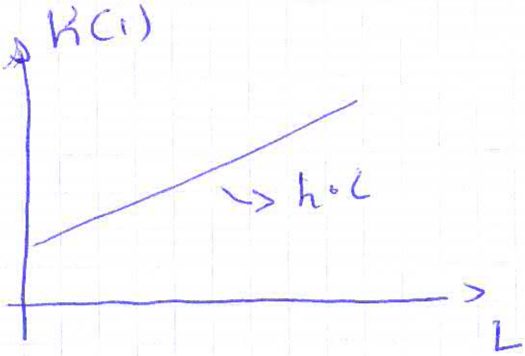
$$h = \lim_{L\to\infty} \frac{K(L)}{L} = \int_0^1 d\rho \, \Lambda(\rho) \, H(\Lambda(\rho))$$

H = HEAVISIDE FUNCTION

$$K(L) = \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i > 0}} \lambda_i = \int_0^L di \, \Lambda(i) \, H(\Lambda(i)) =$$

$$= L \int_0^1 d\rho \, \Lambda(\rho) \, H(\Lambda(\rho))$$

ui SISTEMI CAOTICI SPAZIALMENTE ESTESI



L'ENTROPIA CRESCE con la DIMENSIONE del SISTEMA

- DENSITÀ DI DIMENSIONE DI LYAPUNOV
- RELAZIONE DI KAPLAN-YORKE -

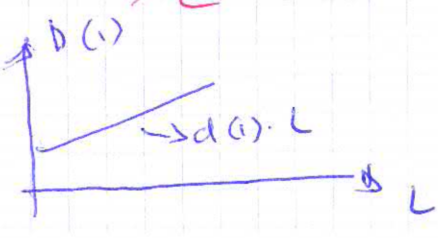
La RELAZIONE di KAPLAN-YORKE si ~~scrive~~ come

$$\sum_{i=1}^{D(l)} \lambda_i = 0$$

$$\int_0^{D(l)} di\, \lambda_i = L \int_0^{D(l)/L} d\rho\, \Lambda(\rho) = 0$$

$$\int_0^{d(l)} d\rho\, \Lambda(\rho) = 0$$

$$d(l) = D(l)/L \longrightarrow \text{DENSITÀ DI DIMENSIONE}$$



Un SISTEMA nel LIMITE TERMODINAMICO presenta CAOS ESTENSIVO se vale

$$\begin{cases} D(1) = L \cdot d(1) \\ K(1) = L \cdot h \end{cases} \qquad L \to \infty$$

e lo spettro di Lyapunov ammette una FORMA ASINTOTICA UNIVERSALE

$$\begin{cases} \Lambda(\rho) = \lim_{L \to \infty} \lambda_i(L) \\ \rho = i/L \end{cases}$$