Vielteilchentheorie **Übungsblatt 7** WS 2006/07

Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
A. Honecker

Mit diesem Übungsblatt soll ein Wellenfunktions-Zugang zur BCS-Theorie der Supraleitung behandelt werden. Wir verwenden dazu einen Hamilton-Operator der Form

$$H = \sum_{\vec{k}\sigma} \epsilon_{\vec{k}}\, c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{q} \\ \sigma_1 \sigma_2}} \langle \vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_2 - \vec{q} | V | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle\, c^\dagger_{\vec{k}_1+\vec{q}\sigma_1} c^\dagger_{\vec{k}_2-\vec{q}\sigma_2} c_{\vec{k}_2\sigma_2} c_{\vec{k}_1\sigma_1}$$

mit

$$\langle \vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_2 - \vec{q} | V | \vec{k}_2, \vec{k}_1 \rangle = \begin{cases} v < 0 & \text{für } \epsilon_F < \epsilon_{\vec{k}_1}, \ldots < \epsilon_F + \hbar\omega_c, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist die Wechselwirkung attraktiv in einem Energiebereich $\hbar\omega_c$ oberhalb der Fermikante und verschwindet sonst.

Aufgabe 1

Wir wollen zuerst die *Cooper*-Instabilität nochvollziehen. Dazu führen wir folgende Größen ein:

$$|F\rangle = \prod_{\substack{\vec{k}\sigma \\ \epsilon_{\vec{k}} \le \epsilon_F}} c^\dagger_{\vec{k}\sigma} |0\rangle\,, \qquad |-\vec{k}\downarrow, \vec{k}\uparrow\rangle = c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} |F\rangle\,, \qquad |\downarrow,\uparrow\rangle = \sum_{\substack{\vec{k} \\ \epsilon_F < \epsilon_{\vec{k}} \le \epsilon_F + \hbar\omega_c}} g(\vec{k})\, |-\vec{k}\downarrow, \vec{k}\uparrow\rangle\,.$$

(a) Zeigen Sie: Die Eigenwertgleichung für H führt auf die Bedingung

$$1 = -v \sum_{\substack{\vec{k} \\ \epsilon_F < \epsilon_{\vec{k}} \le \epsilon_F + \hbar\omega_c}} \frac{1}{2\epsilon_{\vec{k}} + E_0 - E} \tag{1}$$

für die Energie E des Zustandes mit zwei zusätzlichen Elektronen ! Hierbei ist E_0 die Energie des Fermi-Sees $|F\rangle$ bei $v = 0$, d.h. $H_0|F\rangle = E_0|F\rangle$.
Beachte: Die Zustände $|-\vec{k}\downarrow, \vec{k}\uparrow\rangle$ spannen alle Zustände mit zwei zusätzlichen Elektronen auf, deren Gesamtimpuls und Gesamt-z-Komponente des Spins verschwinden.

(b) Gesucht ist die Lösung von (1) mit der Mindestenergie E für zwei zusätzliche Teilchen an der Fermikante. Ersetzen Sie die k-Summe durch ein Integral und leiten Sie die Bedingung

$$1 = -v\, N(\epsilon_F)\, \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\hbar\omega_c - \Delta E/2}{-\Delta E/2} \right|$$

her ! Hierbei ist $\Delta E = E - (E_0 + 2\epsilon_F)$ und $N(\epsilon_F)$ ist die Zustandsdichte an der Fermikante.

(c) Zeigen Sie: Für $\hbar\omega_c \gg |\Delta E|$ führt das Ergebnis von Aufgabenteil (b) auf eine Energieabsenkung der Form

$$\Delta E = -2\hbar\omega_c \exp\left(-\frac{2}{|v|\; N(\epsilon_F)}\right) \qquad !$$

Bemerkungen: Aus dem Ergebnis liest man ab, dass ein Paarzustand von zwei Elektronen mit Wechselwirkung oberhalb der Fermikante niedrigere Energie besitzt als ein Zustand mit zwei zusätzlichen Elektronen ohne Wechselwirkung an der Fermikante. Daraus folgt, dass die Gesamtenergie des Elektronensystems abgesenkt wird, wenn man zwei Elektronen direkt unterhalb der Fermikante in einen Paarzustand oberhalb der Fermikante bringt. Damit ist die Instabilität der Fermiverteilung nachgewiesen. Entscheidend für das Auftreten einer Energieabsenkung ist die Existenz einer attraktiven Wechselwirkung ($v < 0$), die allerdings beliebig schwach sein kann.

Aufgabe 2

Das Ergebnis der letzten Aufgabe zeigt zwar die Instabilität gegen eine Paar-Anregung für eine attraktive Wechselwirkung, sie beantwortet jedoch nicht die Frage nach dem Grundzustand jenseits der Instabilität. Hierfür kann man nach Bardeen, Cooper und Schrieffer einen Variationsansatz machen. Wir definieren den Cooper-Paar-Erzeugungs-Operator

$$b^\dagger_{\vec{k}} = c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}$$

und damit die BCS-Wellenfuntion

$$|\mathrm{BCS}\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\, b^\dagger_{\vec{k}} \right) |0\rangle \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass aus der Normierungsbedingung $\langle \mathrm{BCS}|\mathrm{BCS}\rangle = 1$ für die Variationsparameter $u_{\vec{k}}$, $v_{\vec{k}}$ folgt:

$$\left|u_{\vec{k}}\right|^2 + \left|v_{\vec{k}}\right|^2 = 1 \qquad !$$

(b) Berechnen Sie die folgenden Erwartungswerte:

$$\langle \mathrm{BCS}|\, b^\dagger_{\vec{k}_1} b_{\vec{k}_1} \,|\mathrm{BCS}\rangle \, , \qquad \langle \mathrm{BCS}|\, b^\dagger_{\vec{k}_1} b_{\vec{k}_2} \,|\mathrm{BCS}\rangle \, , \qquad \langle \mathrm{BCS}|\, b^\dagger_{\vec{k}_1} b_{\vec{k}_1} b^\dagger_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_2} \,|\mathrm{BCS}\rangle \qquad !$$