Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
A. Honecker

Aufgabe 1

Wir betrachten spinlose Fermionen auf einer eindimensionalen Kette mit N Plätzen:

$$H = t \sum_{i=1}^{N} \left\{ c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i \right\} + V \sum_i n_i n_{i+1} \,. \tag{1}$$

Der erste Term beschreibt das Hüpfen der Fermionen zwischen den Plätzen i und $i+1$, der zweite bedeutet über die Dichte $n_i = c_i^\dagger c_i$ eine Wechselwirkung zwischen zwei Fermionen auf benachbarten Plätzen. Wir betrachten periodische Randbedingungen, d.h. $c_{N+1}^{(\dagger)} = c_1^{(\dagger)}$.

(a) Betrachten Sie zuerst den wechselwirkungsfreien Fall $V = 0$. Diagonalisieren Sie in diesem Fall H und bestimmen Sie die Einteilchen-Energien ϵ_k ! Betrachten Sie den Grundzustand bei $T = 0$ und bestimmen Sie den Fermi-Impuls k_F !
Beachte: Wir haben den Gitterabstand auf 1 gesetzt. Die Brillouin-Zone ist somit gegeben durch $-\pi < k \leq \pi$.

(b) Schreiben Sie die Wechselwirkung in (1) in der Form

$$H_s = \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_i^\dagger c_j^\dagger V_{i,j} c_j c_i \qquad !$$

Berechnen Sie dann die Fourier-Transformierte $V(k)$ von $V_{i,j}$!

(c) Stellen Sie mit Hilfe der Hartree-Fock-Näherung für die Selbstenergie $\Sigma(k)$ eine Selbstkonsistenzgleichung für die durch eine abstoßende Wechselwirkung $V > 0$ 'renormierten' Einteilchenenergien E_k auf !
Lösen Sie die Selbstkonsistenzgleichung für

(i) $T = 0$! Das geht analytisch, wenn Sie den Grenzfall $N \to \infty$ durchführen und die k-Summe durch ein Integral ersetzen, sowie k_F festhalten.

(ii) $T > 0$! Hier empfiehlt sich eine Iteration der Selbstkonsistenzgleichung. Wählen Sie zur numerischen Auswertung ein festes N (z.B. $N = 100$).

Achtung: Um die Teilchenzahl festzuhalten, muß man ein chemisches Potential μ einführen. Im Fall (i) kann es nachträglich so gewählt werden, dass $E_{k_F} - \mu = 0$. Im Fall (ii) ist es während der Iteration so nachzuführen, dass jeweils eine Teilchendichte $n = 1/2$ eingestellt wird.

(d) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (c), (i) mit der exakten Lösung für die Energie einer Anregung über dem Grundzustand[1]

$$\epsilon(p) = t \, \frac{\pi \sin\gamma}{\gamma} \, \sin p \,,$$

[1] Vgl. z.B. O. Babelon, H.J. de Vega, C.M. Viallet, *Analysis of the Bethe ansatz equations of the XXZ model*, Nucl. Phys. B **220** (1983) 13-34.

mit $\cos\gamma = \frac{V}{2t}$, sowie $0 \leq V \leq 2t$!

(e) Untersuchen Sie nach Aufgabenteil (c), (ii) das Verhalten von E_k als Funktion der Temperatur T für $V > 0$! Wählen Sie z.B. $V = t$ und betrachten Sie insbesondere die Bereiche $k_B T < V$ sowie $k_B T > V$.