Vielteilchentheorie Übungsblatt 3 WS 2006/07

Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
A. Honecker

Aufgabe 1

Wir betrachten zwei gekoppelte Spins der Länge $S = 1/2$, die durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben werden:

$$H = -J\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - h\,(S_1^z + S_2^z)\,.$$

Zur Vereinfachung setzen wir $\hbar = 1$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von H ! Berechnen Sie ferner die thermischen Erwartungswerte $\langle S^z \rangle$, $\langle S_1^z\, S_2^z \rangle$ und $\langle S_1^+\, S_2^- \rangle$!
Hinweis: Schreiben Sie

$$H = -J\left(\frac{1}{2}\,\vec{S}^2 - \frac{3}{4}\right) - h\,S^z$$

mit $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$.

(b) Wir wollen die Greensche Funktion $\langle\langle S_1^+,\, S_2^- \rangle\rangle_z$ berechnen. Schreiben Sie dazu zuerst

$$H = -J\left(\frac{1}{2}\left(S_1^+\,S_2^- + S_1^-\,S_2^+\right) + S_1^z\,S_2^z\right) - h\,(S_1^z + S_2^z) \qquad !$$

Argumentieren Sie dann, dass aufgrund des Spins $1/2$ die Bewegungsgleichungen in den Greenschen Funktionen $\langle\langle S_1^+,\, S_2^- \rangle\rangle_z$, $\langle\langle S_2^+,\, S_2^- \rangle\rangle_z$, $\langle\langle S_1^+\, S_2^z,\, S_2^- \rangle\rangle_z$ und $\langle\langle S_1^z\, S_2^+,\, S_2^- \rangle\rangle_z$ schließen müssen ! Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für diese vier Greenschen Funktionen auf und drücken Sie mit deren Hilfe $\langle\langle S_1^+,\, S_2^- \rangle\rangle_z$ durch $\langle S^z \rangle$, $\langle S_1^z\, S_2^z \rangle$ und $\langle S_1^+\, S_2^- \rangle$ aus !

Hinweis: Neben den üblichen Kommutatoren $[S^z, S^z] = [S^+, S^+] = [S^-, S^-] = 0$, $[S^z, S^+] = -[S^+, S^z] = S^+$, $[S^z, S^-] = -[S^-, S^z] = -S^-$, $[S^+, S^-] = -[S^-, S^+] = 2\,S^z$ gelten für Spin 1/2 die quadratischen Relationen $(S^z)^2 = \frac{1}{4}$, $(S^+)^2 = (S^-)^2 = 0$, $S^z\,S^+ = \frac{1}{2}\,S^+$, $S^z\,S^- = -\frac{1}{2}\,S^-$, $S^+\,S^z = -\frac{1}{2}\,S^+$, $S^-\,S^z = \frac{1}{2}\,S^-$, $S^+\,S^- = \frac{1}{2} + S^z$, $S^-\,S^+ = \frac{1}{2} - S^z$.

(c) Bestimmen Sie $\langle S_1^+\, S_2^- \rangle$ mit Hilfe des Dissipations-Fluktuations-Theorems aus der Greenschen Funktion $\langle\langle S_1^+,\, S_2^- \rangle\rangle_z$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der direkten Berechnung in Aufgabenteil (a) !
Achtung: Da $S_1^+ \neq {S_2^-}^\dagger$, müssen Sie hier die Sprungfunktion

$$\langle\langle S_1^+,\, S_2^- \rangle\rangle''_\omega = \frac{\langle\langle S_1^+,\, S_2^- \rangle\rangle_{\omega+i\,\delta} - \langle\langle S_1^+,\, S_2^- \rangle\rangle_{\omega-i\,\delta}}{2}$$

berechnen.
Hinweis: Wenn Sie es einfacher haben wollen, betrachten Sie $\langle S_2^+\, S_2^- \rangle$. Dann darf man nämlich $\Im\mathrm{m}\langle\langle S_2^+,\, S_2^- \rangle\rangle_{\omega+i\,\delta}$ in das Dissipations-Fluktuations-Theorem einsetzen.