Vielteilchentheorie **Übungsblatt 2** **WS 2006/07**

Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
A. Honecker

Aufgabe 1

Gegeben sei der quantenmechanische harmonische Oszillator in der Form

$$H = \hbar\,\omega_0 \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right)$$

mit

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega_0}}\,\left(b^\dagger + b\right)\,, \qquad p = i\,\sqrt{\frac{\hbar\,m\,\omega_0}{2}}\,\left(b^\dagger - b\right)\,,$$

also $\left[b, b^\dagger\right] = \mathbb{1}$.

(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die Operatoren $b(t)$ und $b^\dagger(t)$ her und lösen Sie diese !

(b) Konstruieren Sie aus $b(t)$ und $b^\dagger(t)$ eine Lösung $x(t)$, so dass $x(0) = x$, $\dot{x}(0) = p/m$!

(c) Bestimmen Sie den Kommutator $[x(t), x(0)]$ und zeigen Sie, dass für die dynamische Suszeptibilität gilt:

$$\chi_{xx}(t) = \Theta(t)\,\frac{\sin(\omega_0\,t)}{m\,\omega_0} \qquad !$$

Aufgabe 2

Wir betrachten einen Spin $\vec{S}$ in einem statischen Feld $B_0\,\vec{e}_z$ in z-Richtung und untersuchen die Antwort auf ein oszillierendes Feld $\vec{B}_s(t) = \vec{e}_x\,B_1\cos(\omega t)$ in x-Richtung.
Der Hamilton-Operator des Gesamtsystems ist

$$\tilde{H}_t = -\gamma\,\vec{S}\cdot\vec{B}(t) = H + H_{s,t}$$

mit einer Konstanten γ und

$$H = -\gamma\,S_z\,B_0\,, \qquad H_{s,t} = -\gamma\,S_x\,B_1\,\cos(\omega t)\,.$$

(a) Betrachten Sie die Bewegungsgleichungen und geben Sie die Lösungen $S_x(t)$ und $S_y(t)$ zu der Anfangsbedingung $\vec{S}(0) = \vec{S}$ an !
Hinweis: Es ist nützlich, die Bewegungsgleichungen für die Operatoren $S_\pm = S_x \pm i\,S_y$ mit Hilfe der Kommutatoren $[S_k, S_l] = i\,\hbar\,\epsilon_{klm}\,S_m$ zu berechnen.

(b) Berechnen Sie die dynamischen Suszeptibilitäten $\chi_{S_xS_x}(z)$ und $\chi_{S_yS_x}(z)$!

(c) Zeigen Sie, dass mit

$$\omega_0 = \gamma\, B_0$$

in linearer Antwort

$$\langle S_x \rangle_t = \gamma\, B_1\, \langle S_z \rangle\, \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\, \cos(\omega\, t)\,, \qquad \langle S_y \rangle_t = \gamma\, B_1\, \langle S_z \rangle\, \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\, \sin(\omega\, t)$$

gilt !