Vielteilchentheorie — Übungsblatt 1 — WS 2006/07

Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
A. Honecker

Aufgabe 1

Wir betrachten ein System identischer Fermionen. Der Einteilchen-Beitrag zu dem Hamilton-Operator lasse sich in zweiter Quantisierung schreiben als $H_0 = \sum_k \varepsilon_k \, c_k^\dagger c_k$.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Paar-Wechselwirkung

$$V = \sum_{i<j} V(i,j)$$

wie folgt schreiben läßt:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} \langle k_1, k_2 | V(1,2) | k_3, k_4 \rangle \, c_{k_1}^\dagger c_{k_2}^\dagger c_{k_4} c_{k_3} \qquad ! \tag{1}$$

(b) Bestimmen Sie den Kommutator $[c_k, V]$!

(c) Zeigen Sie, dass $\left[\hat{N}, V\right] = 0$, wobei $\hat{N} = \sum_k c_k^\dagger c_k$ der Gesamt-Teilchenzahl-Operator ist !

(d) Zeigen Sie, dass für den thermischen Erwartungswert

$$\left\langle c_k^\dagger c_k \right\rangle_0 = \frac{\mathrm{Spur}\, c_k^\dagger c_k \, \mathrm{e}^{-\beta \left(H_0 - \mu \hat{N}\right)}}{\mathrm{Spur}\, \mathrm{e}^{-\beta \left(H_0 - \mu \hat{N}\right)}} = f\left(\varepsilon_k - \mu\right)$$

mit der Fermi-Funktion $f(\varepsilon) = \left(\mathrm{e}^{\beta\,\varepsilon} + 1\right)^{-1}$ gilt !
Hinweis: Stellen Sie $H_0 - \mu\,\hat{N} = \sum_k (\varepsilon_k - \mu)\,\hat{n}_k$ dar und verwenden Sie, dass die Besetzungszahl-Operatoren kommutieren $[\hat{n}_k, \hat{n}_{k'}] = 0$.

(e) Bestimmen Sie $\langle V \rangle_0$!
Hinweis: Überlegen Sie, welche Summanden von (1) zur Spur beitragen und drücken Sie diese über Besetzungszahlen aus.

Aufgabe 2

Wiederholen Sie Aufgabe 1, aber für Bosonen. Die Fermi-Funktion in Aufgabenteil (d) ist dann durch die Bose-Funktion $f_-(\varepsilon) = \left(\mathrm{e}^{\beta\,\varepsilon} - 1\right)^{-1}$ zu ersetzen.