Selbstorganisierte Kritikalität

Norbert Warncke

1. Februar 2005

Der vorliegende Text ist die Ausarbeitung zu dem Vortrag über Selbstorganisierte Kritikalität als Teil des Seminars Angewandte Methoden der Statistischen Physik von PD Dr. Andreas Honecker, an der Technischen Universität Braunschweig im Wintersemester 2004/05. Er basiert auf Kapitel 1-8 von [1] sowie [3] und [4].

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Mit den Methoden der Mechanik kann man sehr gut makroskopische Körper beschreiben. Diese Art von Körpern verhält sich praktisch deterministisch, so dass aus den Bewegungsgleichungen eines Körpers bei der Kenntnis von Anfangsbedingungen zu jedem Zeitpunkt Ort und Geschwindigkeit des Körpers bestimmt werden kann. Daraus folgerte Laplace 1776 (aus [2], S. 415): „Der momentane Zustand des Systems Natur ist offensichtlich eine Folge dessen, was er im vorherigen Moment war, und wenn wir uns eine Intelligenz vorstellen, die zu einem Zeitpunkt alle Beziehungen zwischen den Teilen des Universums verarbeiten kann, so könnte sie Orte, Bewegungen und allgemeine Beziehungen zwischen diesen Teilen für alle Zeitpunkte in Vergangenheit und Zukunft vorhersagen.“ Diese Intelligenz wird auch *Laplacescher Dämon* genannt.

Wird die Anzahl der im untersuchten System enthaltenen Körper jedoch groß, so lassen sich aus mikroskopischen Betrachtungen nur in wenigen Fällen makroskopische Eigenschaften des Systems ableiten (z.B. Thermodynamik: Ideales Gas mit konstanter Wärmekapazität aus einer Menge nicht wechselwirkender Punktteilchen), die dann die Realität näherungsweise, teilweise aber auch sehr ungenau beschreiben. Zudem kommt man auch ohne quantenmechanische Überlegungen zum gleichen Schluss wie Poincaré (1903, aus [2], S. 415): „Eine sehr kleine Ursache, die wir nicht bemerken, bewirkt einen künstlichen Effekt, den wir nicht übersehen können, und dann sagen wir, der Effekt sei zufällig.“ Große Systeme aus vielen beteiligten Einzelteilen haben also meist ihre ganz eigenen Regeln. Die Theorie der Selbstorganisierten Kritikalität ist ein Versuch, die Häufigkeiten von Ereignissen in solchen Systemen in Abhängigkeit von ihrer Größe durch Potenzgesetze zu beschreiben.

2 Theorie der Selbsorganisierten Kritikalität

2.1 Der kritische Zustand

Im Folgenden soll auf einige Eigenschaften von Systemen eingegangen werden, die sich in einem kritischen Zustand befinden. Der kritische Zustand eines Systems ist ein Produkt der Wechselwirkung einer sehr großen Anzahl im System enthaltener Teilchen. Er ist dadurch charakterisiert, dass die Wahrscheinlichkeit bzw. die Häufigkeit, mit der ein Ereignis (z.B. ein Erdbeben) in einem gewissen Zeitintervall auftritt, umso niedriger ist, je größer dieses Ereignis ist (Erdbebenstärke). Der Zusammenhang ist gerade durch das Potenzgesetz

$$N(E) = E^{-\tau} \tag{1}$$

bzw.

$$\log N(E) = -\tau \log E \tag{2}$$

gegeben (siehe [1]). Dabei ist $N(E)$ beispielsweise die Anzahl von Erdbeben einer gewissen Stärke (Energie) E. Für Erdbeben existiert ein solches Gesetz in Form des Gutenberg-Richter-Gesetzes.

Anders formuliert können über ein System im kritischen Zustand nur Aussagen über Häufigkeiten von Ereignissen gewisser Größen in einem gewissen Zeitraum gemacht werden. Vorhersagen über das Eintreten eines Ereignisses sind damit nicht möglich.

Um die den kritischen Zustand charakterisierenden Exponenten zu ermitteln, berechnet man eine Ausgleichsgerade für das Histogramm (die Häufigkeit aufgetragen über der Größe bei doppelt logarithmischer Skalierung). Oft ist es günstiger, statt des Histogramms das „von oben“ kumulative Histogramm zu verwenden, da hierbei der Einfluss der schlechten Statistik durch die geringe Wahrscheinlichkeit von großen E auf die Ausgleichsgerade geringer ausfällt. Beim kumulativen Histogramm ist die Häufigkeit $\tilde{N}(E)$ definiert als die Summe aller Häufigkeiten $N(E')$ mit $E' \geq E$, also

$$\tilde{N}(E) = \sum_{E'=E}^{\infty} N(E') \tag{3}$$

bzw.

$$\tilde{N}(E) = \int_{E}^{\infty} N(E')\mathrm{d}E' \tag{4}$$

für kontinuierlich verteilte E. Den Exponenten τ erhält man nach

$$\tilde{N}(E) = \int_{E}^{\infty} E'^{-\tau} = E^{1-\tau} = E^{-(\tau-1)} \tag{5}$$

aus dem Anstieg der Ausgleichsgeraden durch Addition mit 1.

Für ein System, welches aus vielen miteinander interagierenden Einzelteilen besteht, ist es möglich, über eine Folge von metastabilen Zuständen einen kritischen Zustand zu erreichen. Anders formuliert erreicht das System den kritischen Zustand durch seine Eigendynamik. In solchen Fällen spricht man von *selbstorganisierter* Kritikalität. Im Gegensatz z.B. zu Phasenübergängen sind die Zusammenhänge über Potenzgesetze hierbei nicht das Resultat eines feineingestellten Parameters (der Temperatur), sondern nur auf die zeitliche Entwicklung des Systems zurückzuführen.

Aus den Eigenschaften ergeben sich einige weitere Merkmale, die einen kritischen Zustand charakterisieren. Zunächst ist der gesetzmäßige Zusammenhang unabhängig vom gewählten Maßstab. Für jedes Intervall ergibt sich bei doppelt logarithmischer Auftragung von (1) eine Gerade. Eingeschränkt wird dies nur durch die Größe des Systems bzw. durch die kleinsten Teile des Systems.

Berechnet man das Spektrum eines Systems im kritischen Zustand (Fourier-Transformierte der gemessenen Stärke von Erschütterungen über der Zeit, der Schwankungen eines Aktienwertes usw.) aus seinem Zeitsignal $f(t)$, so ergibt sich mit

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \propto \frac{1}{\omega^{\gamma}} \tag{6}$$

wieder ein Potenzgesetz (1/f-Rauschen). Für ein völlig chaotisches Verhalten würde man ein nahezu konstantes Spektrum bekommen (weißes Rauschen), für ein deterministisches bzw. periodisches System erhält man ein endliches bzw. sogar ein diskretes Spektrum. Der

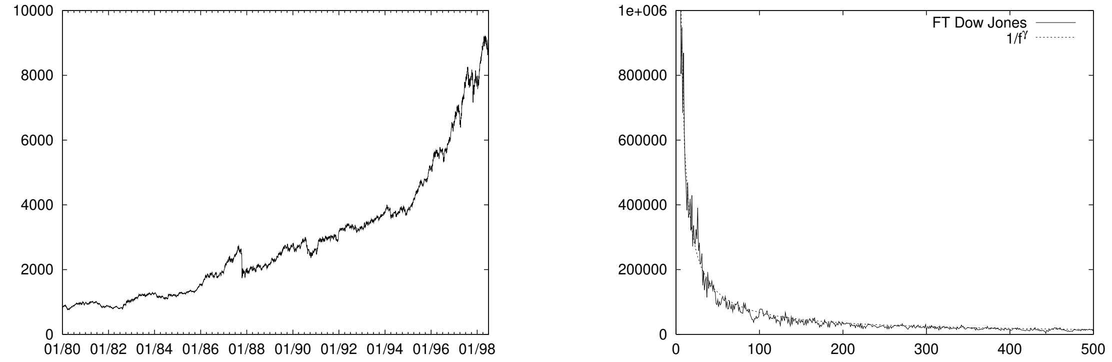


Abbildung 1: Verlauf des Dow Jones Indexes vom 01.01.1980 bis 30.06.1998 (links) (Quelle: [7]) und Spektrum (rechts)

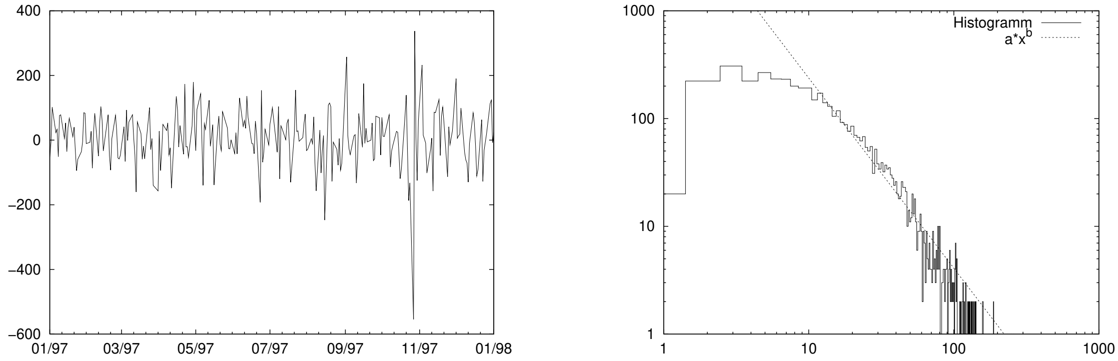


Abbildung 2: Diskrete Ableitung des Dow Jones (links) und zugehöriges Histogramm der Änderungen zum Vortag (rechts)

kritische Zustand ist sozusagen der Punkt zwischen deterministischem und chaotischem Verhalten eines Systems.

Eine dritte Eigenschaft einer ein dynamisches System im kritischen Zustand beschreibenden Größe ist, dass sie sich zeitlich fraktal verhält. Die Länge einer Kurve z.B. ist fraktal, wenn der gemessene Wert für die Länge abhängig vom verwendeten Maßstab ist, d.h. bei unendlich kleiner Schrittweite geht die Länge der Kurve gegen unendlich.

2.2 Beispiele für kritisches Verhalten

Wie schon das genannte Beispiel der Häufigkeiten von Erdbeben findet man kritisches Verhalten in vielen Bereichen. So ergibt auch die Anzahl von Städten über einer gewissen Einwohnerzahl aufgetragen über dieser Einwohnerzahl (Gesetz von Zipf) ein Potenzgesetz. Risse in Materialien zeigen ebenso ein selbstähnliches/fraktales Verhalten wie Küstenlinien oder Flussläufe.

In Abbildung 1 ist der Verlauf des Dow Jones Aktienindex sowie das zugehörige Spektrum zu sehen. Wie man sieht, kann das Spektrum in guter Näherung durch ein $1/f^\gamma$-Gesetz beschrieben werden. Aus dem Fit erhält man für den Exponenten $\gamma = 0,910 \pm 0,006$.

Trägt man die Häufigkeit der Änderung zum Vortrag innerhalb eines gewissen Intervalls (hier 1-Punkt-Schritte) über der Änderung auf, so erhält man das in Abbildung 2 dargestellte Histogramm. Nimmt man an, dass bei der guten Übereinstimmung des Spektrums mit der Theorie Aktienkurse bzw. -indizes das Resultat einen Systems im kritischen Zustand sind, so erwartet man für das Histogramm der Änderung zum Vortag ebenfalls ein Potenzgesetz. Dies ist aber nur für etwa eine Größenordnung der Fall. Hier werden die Grenzen des Systems deutlich: Bei großen Änderungen war der Beobachtungszeitraum zu klein, hier ist deshalb die Statistik schlecht und das Histogramm zeigt starke Schwankungen. Interessanterweise sind kleine Änderungen unter 10 Punkten statistisch unterrepräsentiert.

2.3 Modelle mit kritischem Verhalten

Ein Modell, welches sich einfach programmieren lässt und das bei genügend langer Laufzeit kritisches Verhalten zeigt, ist das Sandhaufen-Modell (siehe [1]). Man betrachtet dabei ein zweidimensionales, diskretes Gitter der Größe $M \times N$. Jeder Gitterpunkt wird durch eine ganze Zahl im Intervall [0,4] repräsentiert. Diese Zahl stellt anschaulich die Anzahl der Sandkörner dar, die sich auf diesem Gitterpunkt befinden.

Jetzt braucht man noch eine Vorschrift, die die Interaktion der Sandkörner untereinander beschreibt. In diesem Fall wird, sollte die Anzahl der Sandkörner an einem Gitterpunkt ≥ 4 sein, diese Anzahl um 4 reduziert und an alle direkt benachbarten Gitterpunkten wird ein Sandkorn abgegeben, d.h. die Zahl der direkten Nachbarn wird um 1 erhöht. In diesem Fall hat eine kleine Elementarlawine stattgefunden. Befindet sich ein Gitterpunkt am Rand des Gitters, so fallen die Sandkörner, die nicht an einen Nachbarn gegeben werden können, „vom Tisch“.

Der Algorithmus besteht nun darin, dass in jedem Zeitschritt ein Sandkorn auf eine zufällige Gitterstelle fällt, d.h. der Wert einer zufälligen Gitterstelle wird um 1 erhöht. Nun werden alle Gitterstellen nach obiger Vorschrift so oft überprüft, bis keine Werte größer 3 mehr auftreten. Dabei wird die Anzahl der Elementarlawinen gezählt; sie repräsentiert die Größe der Lawine zu diesem Zeitschritt.

Zu Beginn der Simulation werden also alle Sandkörner an ihrem Platz liegenbleiben. Bei zunehmender Laufzeit stellen sich erste Lewinen ein, und irgendwann erreicht das System den kritischen Zustand: Ein Sandkorn kann entweder einfach liegenbleiben (nichts passiert), oder eine über das ganze Gitter erstreckende Lawine auslösen (ultimative Katastrophe). Zwischen der Größe einer Lawine und der zugehörigen Häufigkeit gibt es ein Potenzgesetz mit einem kritischen Exponenten τ, welcher für dieses Modell charakteristisch ist. Bei Variation der Vorschrift ändert sich nur der Exponent.

Alternativ kann man sich dieses Modell auch als Bürokratie-Modell veranschaulichen: In einem rechteckigen Großraumbüro sitzen Beamte an ihren Schreibtischen. Zu bearbeitende Anträge werden zufällig an einen Beamten gegeben. Die Beamten machen nichts, außer jedem ihrer direkten Nachbarn einen Antrag zu geben bzw. aus dem Fenster zu werfen, sobald sie 4 oder mehr Anträge auf dem Tisch haben. Bis zur ultimativen bürokratischen Katastrophe ist es nur noch eine Frage der Zeit. . .

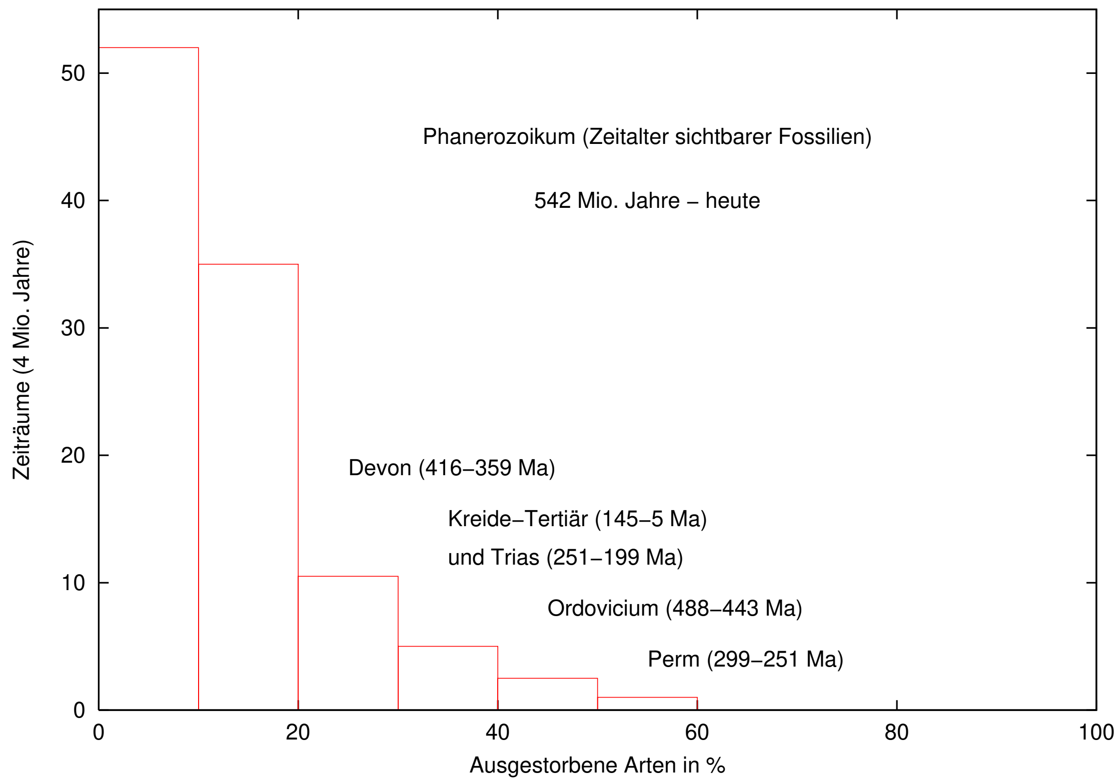


Abbildung 3: Histogramm ausgestorbener Arten in Zeitschritten von 4 Millionen Jahren (aus [1])

3 Simulation des Bak-Sneppen-Modells der Evolution

3.1 Prinzipien der Evolution

Die wesentlichen Grundlagen der Evolutionstheorie gehen auf Charles Robert Darwin zurück. Dieser postulierte

- dass sich Organismen durch einen kontinuierlichen Verzweigungsprozess aus gemeinsamen Vorfahren entwickeln;
- dass mehr Nachkommen erzeugt werden, als zum reinen Arterhalt notwendig sind, wobei durch Variation des Erbmaterials (Mutation) und den Kampf ums Dasein gewährleistet wird, dass nur die am besten an die Umwelt angepassten Lebewesen überleben und sich weiter fortpflanzen können („Überleben des Tüchtigsten“);
- und dass die Evolution kontinuierlich abläuft.

Die Kontinuität der Evolution steht allerdings im Widerspruch zu Erkenntnissen, die man aus Fossilien gewonnen hat. Man hat Zeiträume beobachtet, in denen besonders viele Arten neu entstehen (Beispiel: Kambrische Explosion, vor ca. 540 Mio. Jahren) oder auch verschwinden (Massenaussterben, z.B. Kreide-Trias-Impakt vor ca. 65 Mio. Jahren oder der Übergang vom Perm zum Trias vor ca. 251 Mio. Jahren). Abbildung 3 zeigt das von Per Bak aus den von D. Raup und J. Sepkoski durch Analyse von Fossilien gewonnen Daten erstellte Diagramm. Dabei wurde die Zeit des Phanerozoikums (542 Mio. Jahre bis heute) in Intervalle von 4 Millionen Jahren unterteilt. Aufgetragen ist die Anzahl der Intervalle, in denen ein gewisser Prozentsatz von Arten ausgestorben ist, über dem Prozentsatz der ausgestorbenen Arten. Wie man sehen kann, sind Zeiträume mit wenigen ausgestorbenen Arten häufig, während es nur einen Zeitraum gibt, in dem mehr als 50% der Arten ausgestorben sind. Interessant ist, dass man das Diagramm durch ein Potenzgesetz mit dem Exponenten $\tau \approx 0,9$ beschreiben kann, wenn auch durch die geringe Anzahl von Messpunkten nur sehr stark genähert.

3.2 Das Bak-Sneppen Modell der Evolution

Per Bak und Kim Sneppen (siehe [1]) stammt eine Überlegung unter anderen, die Evolution einer Menge von Wesen zu modellieren ([5]). Insbesondere ist dieses Modell deshalb interessant, da es ein weiteres Beispiel für selbstorganisierte Kritikalität ist. Die Idee dabei ist, das komplexe Gebilde Evolution auf einfachste Regeln zu stutzen, wobei die grundlegenden Annahmen (Anpassungen an die Umwelt und Wechselwirkung mit anderen Wesen) jedoch erhalten bleiben. Das Ergebnis war das Bak-Sneppen-Modell der Evolution, vorgestellt in einer und zwei Dimensionen in [3] bzw. als verallgemeinertes eindimensionales Modell in [4].

Das hier verwendete Modell (eindimensional) besteht aus einer periodischen Kette (Ring) mit einer Anzahl N Gitterpunkten, wobei jeder dieser Gitterpunkte ein Wesen oder eine Art darstellt. Jedem Gitterpunkt i ist ein Wert $f_i \in [0,1]$ zugeordnet, der die Fitness des jeweiligen Wesens darstellt. Dieser Wert modelliert sozusagen, wie gut eine Art an ihre Umwelt (das System) angepasst ist.

Der Algorithmus der Simulation besteht nun aus folgenden Schritten (siehe [1] und [4]):

Initialisierung: Die Fitness-Werte f_i an jedem Gitterpunkt werden mit einer Zufallszahl $\in [0,1]$ initialisiert.

Schleife: Zu jedem Zeitschritt wird

- das globale Minimum aller Fitness-Werte f_i gesucht und
- den a linken und b rechten Nachbarn des Gitterpunktes mit minimaler Fitness werden neue Zufallszahlen zugeordnet.

Abbruch: Nach einer gewissen Anzahl von Zeitschritten wird die Simulation beendet.

Durch das Ersetzen der Fitness-Werte der Nachbarn des minimalen Gitterpunktes erreicht man die Wechselwirkung der Arten untereinander: Stirbt eine Art aus, so ergeben sich die mit dieser Art in Verbindung stehenden Arten entweder bessere Bedingungen (hoher neuer Fitness-Wert) z.B. durch das Wegfallen eines Feindes oder schlechtere Bedingungen (niedriger Fitness-Wert) durch fehlende Nahrung. Die Parameter a und b legen somit das verallgemeinerte (eindimensionale) Bak-Sneppen-Modell BSab fest.

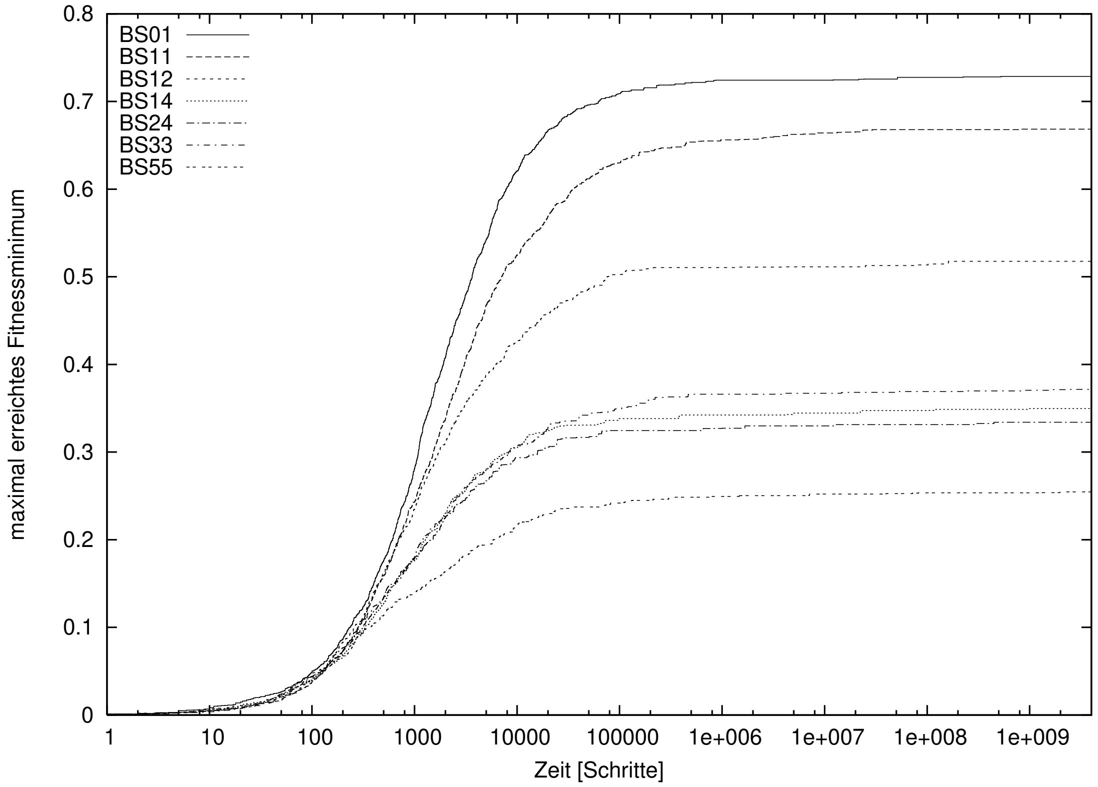


Abbildung 4: Zeitliches Verhalten der Schwelle f_C für verschiedene Modelle

3.3 Simulationsergebnisse

Im Rahmen dieser Arbeit wurde mit dem oben beschriebenen Algorithmus einige Simulationen durchgeführt. Anhand der Ergebnisse sollte geprüft werden, wie sich dieses Modell im kritischen Zustand verhält und welche Exponenten sich für die untersuchten Größen ergeben. Weiterhin sollte die Änderung der Exponenten bei variierten Modellparametern untersucht werden. Zuletzt ergibt sich aus den Überlegungen zur Evolution noch die Frage, ob die erhaltenen Daten Ähnlichkeiten zu den aus Fossilienfunden aufweisen, insbesondere was die Häufigkeiten von Massenaussterben betrifft.

Nach [4] sei zur Charakterisierung der Anisotropie der Anisotropiekoeffizient

$$k = \frac{|a-b|}{a+b+1} \tag{7}$$

definiert. Für die Simulationen wurde ein Gitter mit $N = 2000$ Plätzen verwendet, sofern dies nicht anders gekennzeichnet ist. Nach [4] ist für diese Anzahl von Wesen der Fehler für die Schwelle kleiner als 1 % gegenüber einem unendlichen Gitter. Weiterhin erreicht nach [4] das System nach etwa 10^7 Zeitschritten den stationären Zustand. Aus Gründen der Implementierung und der Laufzeit wurden die durchgeführten Simulationen auf $2^{32} - 1 \approx 4,3 \cdot 10^9$ Zeitschritte begrenzt.

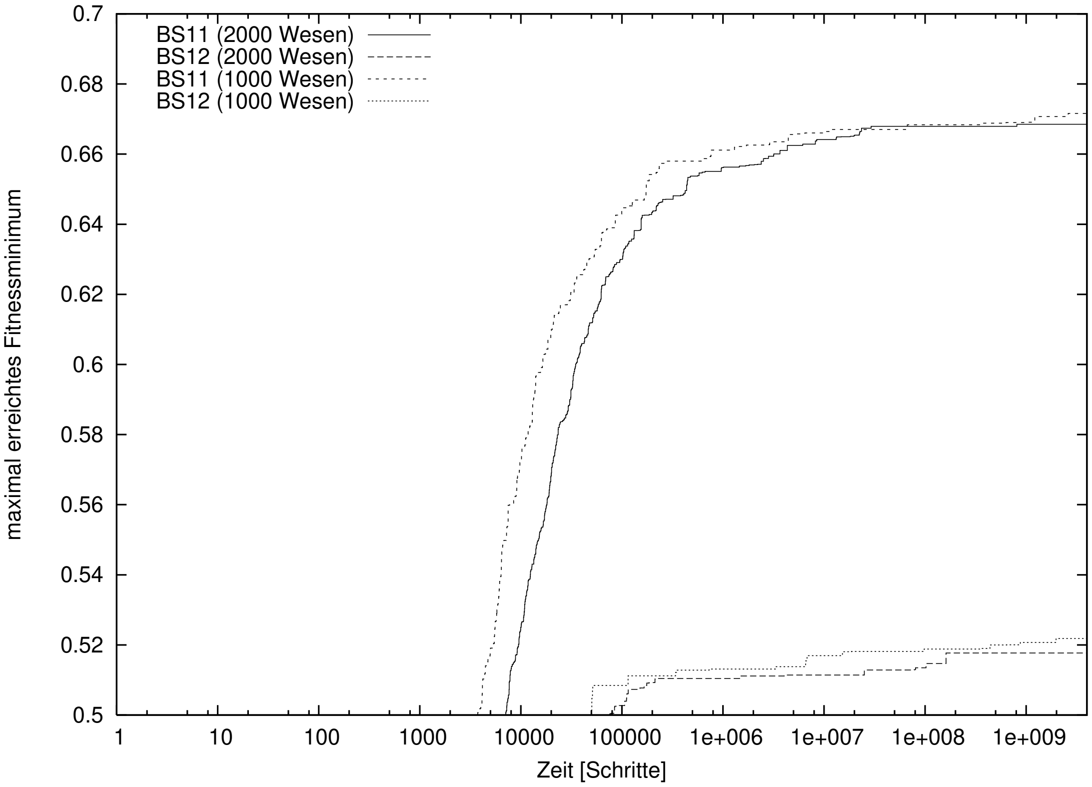


Abbildung 5: Zeitliches Verhalten der Schwelle für Systeme mit $N = 1000$ und $N = 2000$ Gitterplätzen

3.3.1 Verhalten der Schwelle

Führt man eine Simulation des Bak-Sneppen-Modells (siehe [6]) durch, so beobachtet man nach einiger Zeit zunächst, dass die minimale Fitness stetig steigt. Dabei liegen im Wesentlichen alle Fitness-Werte über einer Schwelle f_C, nur einige wenige Gitterpunkte liegen darunter und werden ständig neu ersetzt. In der Simulation ist diese Schwelle als der maximale bisher erreichte Fitness-Wert definiert. Damit kann die Schwelle nur steigen. Zu untersuchen ist also, ob die Schwelle gegen einen Wert konvergiert und ob sie charakteristisch für den kritischen Zustand ist.

Abbildung 4 zeigt das zeitliche Verhalten der Schwelle für einige Modelle. Die Schwellwerte f_C zeigen dabei ein Verhalten gemäß den Erwartungen. Zunächst steigt die Schwelle stark an, bis nach etwa 10^6 Zeitschritten der Graph in eine nahezu horizontale Linie übergeht. Die Behauptung aus [4] wird damit bestätigt, dass nach etwa 10^7 Zeitschritten der kritische Zustand erreicht ist.

In Tabelle 1 sind die erreichten Schwellwerte für verschiedene Modelle aufgelistet. Die Abweichung von den angegebenen Literaturwerten ist gering. Die Ergebnisse der Simulationen mit $N = 1000$ impliziert, dass die erreichten Schwellen für kleine Systeme größer sind. Damit erwartet man für $N = 2000$ auch etwas höhere Werte als für ein unendlich

Modell	Anisotropie	Simulationsergebnisse		Literaturwerte	
	k	$N = 2000$	$N = 1000$	$N = 2000$	$N = \infty$
BS01	1/2	0,7287		0,717(2)	0,7240(1)
BS11	0	0,6685	0,6716	0,661(9)	0,6672(2)
BS12	1/4	0,5177	0,5219	0,501(3)	
BS14	1/2	0,3497		0,329(3)	
BS24	2/7	0,3341		0,317(3)	
BS33	0	0,3717		0,36(1)	
BS55	0	0,2545			

Tabelle 1: Erreichte Schwellen nach $2^{32} - 1$ Zeitschritten für $N = 2000$ und $N = 1000$, mit Literaturwerten (Fehler in Klammern, aus [4])

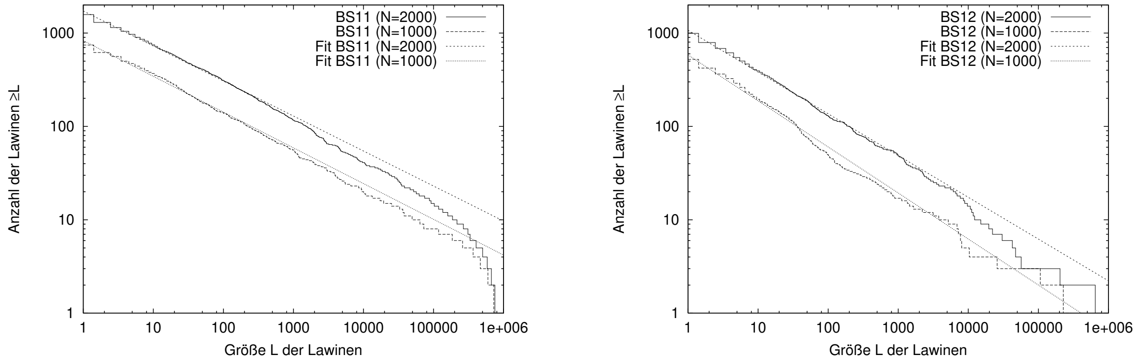


Abbildung 6: Vergleich der kumulativen Histogramme der Lawinen für gleiche Systeme mit variierter Größe

großes System, was durch die Literaturwerte für $N = \infty$ auch bestätigt wird. Allerdings weichen diese Ergebnisse von den Literaturwerten für $N = 2000$ ab. Mögliche Ursachen dafür können bei Unterschieden in den genauen Simulationsbedingungen liegen, die wie die Anzahl der Zeitschritte der Simulation nicht angegeben wurden. Es bleibt festzuhalten, dass die Schwelle geringfügig von der Systemgröße abhängig ist.

Offenbar ist die für große Zeiten erreichte Schwelle nicht nur von der Anisotropie k, sondern auch von der Größe von a und b abhängig, da man sonst für BS01 und BS14 bzw. BS11, BS33 und BS55 gleiche Schwellen im kritischen Zustand erreichen müsste. Die Schwelle ist also zur Charakterisierung des kritischen Zustandes nicht geeignet und ist damit keine universelle Eigenschaft des Modells.

3.3.2 Verteilung der Lawinen

Ein weiterer möglicher Kandidat für eine das Modell charakterisierende, universelle Eigenschaft ist die Verteilung der Lawinen. Die Größe einer Lawine L ist hierbei festgelegt durch die Anzahl von Zeitschritten, während derer das globale Minimum der Fitness-Werte unter

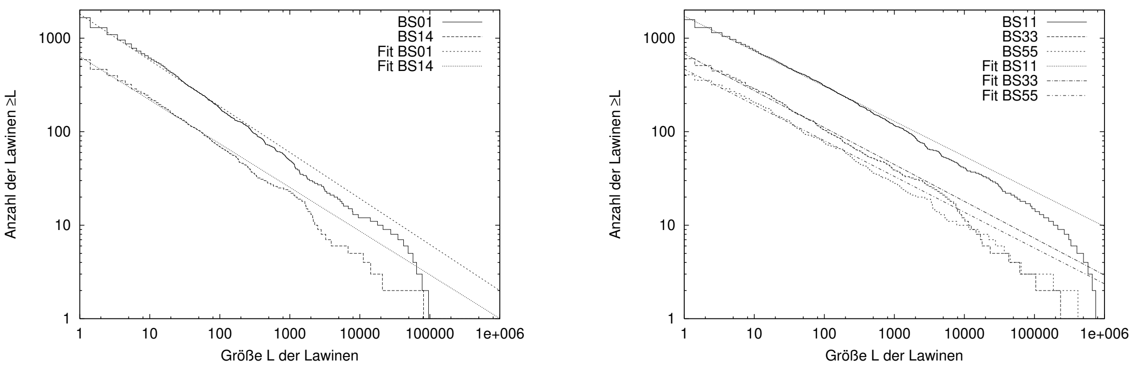


Abbildung 7: Vergleich der kumulativen Histogramme der Lawinen für Systeme mit gleicher Anisotropie

Modell	Anisotropie	Exponent τ	
	k	$N = 2000$	$N = 1000$
BS01	1/2	$1,492916 \pm 0,002219$	
BS11	0	$1,374983 \pm 0,00122$	$1,382844 \pm 0,002363$
BS12	1/4	$1,475155 \pm 0,001566$	$1,492797 \pm 0,005796$
BS14	1/2	$1,467235 \pm 0,003129$	
BS24	2/7	$1,453589 \pm 0,004938$	
BS33	0	$1,39445 \pm 0,003081$	
BS55	0	$1,382654 \pm 0,003961$	

Tabelle 2: Ermittelte Exponenten der Verteilung der Lawinen unterschiedlicher Modelle, mit Literaturwerten (Fehler in Klammern, aus [4])

der Schwelle liegt. Wird also die Schwelle erreicht bzw. überschritten und damit erhöht, ist die aktuell laufende Lawine beendet und es wird neu begonnen zu zählen. Diese Definition der Lawinen unterscheidet sich von den in der Literatur üblichen Definitionen, weshalb die gewonnenen Ergebnisse nicht mit Daten aus [3] und [4] vergleichbar sind.

Abbildung 6 zeigt die kumulativen Histogramme der Modelle BS11 (links) und BS12 (rechts) jeweils bei einer Systemgröße von $N = 1000$ und $N = 2000$ Gitterplätzen. Wie man sehen kann, liegen die Ausgleichsgeraden nahezu parallel. Tabelle 2 zeigt die zugehörigen Exponenten τ der verschiedenen Modelle. Die angegebenen Fehler sind die des Fits, wobei die Werte der Exponenten bei Variation des Fitintervalls wesentlich stärker schwanken, als dies durch die angegebenen Fehler deutlich wird. Es ist davon auszugehen, dass bereits die zweite Nachkommastelle fehlerbehaftet ist. Eine bessere Genauigkeit konnte aufgrund der geringen Anzahl von Lawinen insbesondere für große L nicht erreicht werden.

Die Exponenten bleiben also für die untersuchten BSab-Modelle im Rahmen des Fehlers bei Variation der Größe des Systems N gleich.

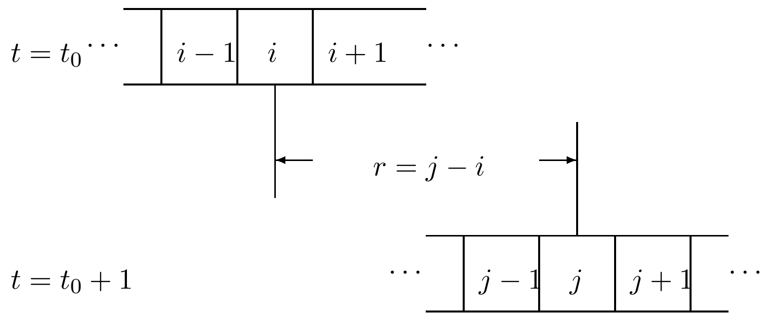


Abbildung 8: Definition des Abstands r der Gitterpunkte mit minimaler Fitness zu aufeinanderfolgenden Zeitschritten

In Abbildung 7 sind Histogramme von Systemen gleicher Anisotropie ($k = 0$ für BS11, BS33 und BS55 sowie $k = 1/2$ für BS01 und BS14) dargestellt. Man sieht auch hier wieder nahezu parallele Geraden. Tabelle 2 zeigt, dass die Unterschiede der Exponenten der Modelle für $k = 0$ und $k = 1/2$ um eine Größenordnung größer sind als bei gleicher Anisotropie. Offenbar sind die Exponenten τ verschiedener Modelle bei gleicher Anisotropie k im Rahmen des Fehlers gleich.

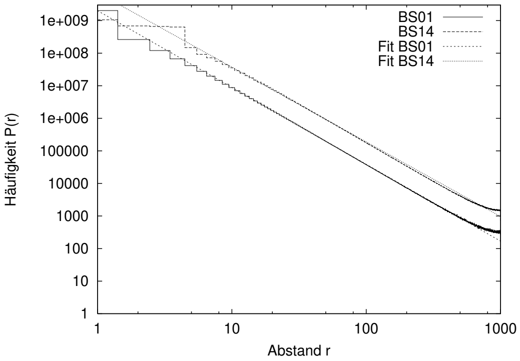
Aus obigen Beobachtungen kann man nun den Schluss ziehen, dass der Exponent τ weder von der Systemgröße noch von der Anzahl der zu einem Zeitschritt ersetzten linken und rechten Nachbarn, sondern lediglich von der Anisotropie k abhängt. Diese Unabhängigkeit von mikroskopischen Details des Systems impiziert, dass der Exponent τ der Verteilung der Lawinengrößen eine universelle Größe und damit charakteristisch für das System im kritischen Zustand ist.

3.3.3 Verteilung der Abstände sukzessiver minimaler Fitness

Der Abstand r der Gitterpunkte mit minimaler Fitness zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten (siehe Abbildung 8) ist ein Maß für die Lokalität von Aussterbezyklen. Ist der Abstand gleichverteilt, so würde das bedeuten, dass unabhängig vom Wesen mit minimaler Fitness im letzten Zeitschritt alle Wesen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben auszusterben bzw. ersetzt zu werden. Sind Aussterbevorgänge bzw. Lawinen eher ein lokales Ereignis, so müssten kleine Abstände wesentlich häufiger auftreten als große. Man erstellt also wieder ein Histogramm der Abstände und sucht nach einem Potenzgesetz. Der kritische Exponent für die Verteilung des Abstandes ist π.

Wie man in Tabelle 3 sehen kann, liegen die Abweichungen des Exponenten π für Modelle mit gleicher Systemgröße N fast schon im Bereich des Fehlers des Fits. Auch für unterschiedliche Anisotropie stimmen die Exponenten sehr gut überein, wie die nahezu perfekt parallelen Geraden der Graphen in Abbildung 9 zeigen.

Damit können die bereits für den Exponenten τ gemachten Aussagen auf die Verteilung



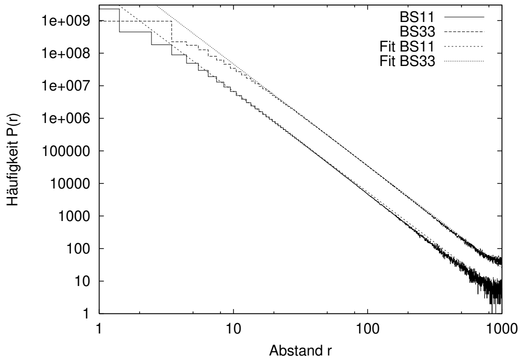


Abbildung 9: Vergleich der Histogramme der Abstände r für Systeme mit gleicher Anisotropie

Modell	Anisotropie	Exponent π		Literaturwert
	k	$N = 2000$	$N = 1000$	$N = 2000$
BS01	1/2	$2,35918 \pm 0,0006124$		2,401(2)
BS11	0	$3,09557 \pm 0,001126$	$3,09503 \pm 0,001597$	3,23(2)
BS12	1/4	$2,55793 \pm 0,001058$	$2,55361 \pm 0,001953$	
BS14	1/2	$2,29294 \pm 0,001699$		
BS33	0	$3,12598 \pm 0,000914$		

Tabelle 3: Ermittelte Exponenten der Verteilung der Abstände r unterschiedlicher Modelle, mit Literaturwerten (Fehler in Klammern, aus [4])

des Abstandes übertragen werden: Der Exponent ist nur abhängig von der Anisotropie, bei Variation der Anzahl der zu ersetzenden Nachbarn bzw. der Systemgröße bleibt er gleich. Damit ist auch π eine universelle Größe des Modells und charakterisiert somit den kritischen Zustand.

4 Zusammenfassung

Anhand der Simulationsdaten konnte gezeigt werden, dass sich das Bak-Sneppen-Modell der Evolution durch seine Eigendynamik in einen kritischen Zustand bewegt, wie dies die Theorie der Selbstorganisierten Kritikalität beschreibt. Neben der Schwelle f_C, die anschaulich die Annäherung des Systems an den kritischen Zustand deutlich macht, die aber im Rahmen der Theorie nicht charakteristisch für den kritischen Zustand ist, wurden mit den Exponenten der Verteilung der Lawinengröße L und des Abstandes r zwei universelle und mit Ausnahme der Anisotropie von mikroskopischen Größen unabhängige Größen nachgewiesen.

Es bleibt die Frage, inwiefern dieses Modell der Evolution etwas mit der Realität zu tun hat bzw. ob die durch das Modell gewonnenen Erkenntnisse zur Veranschaulichung

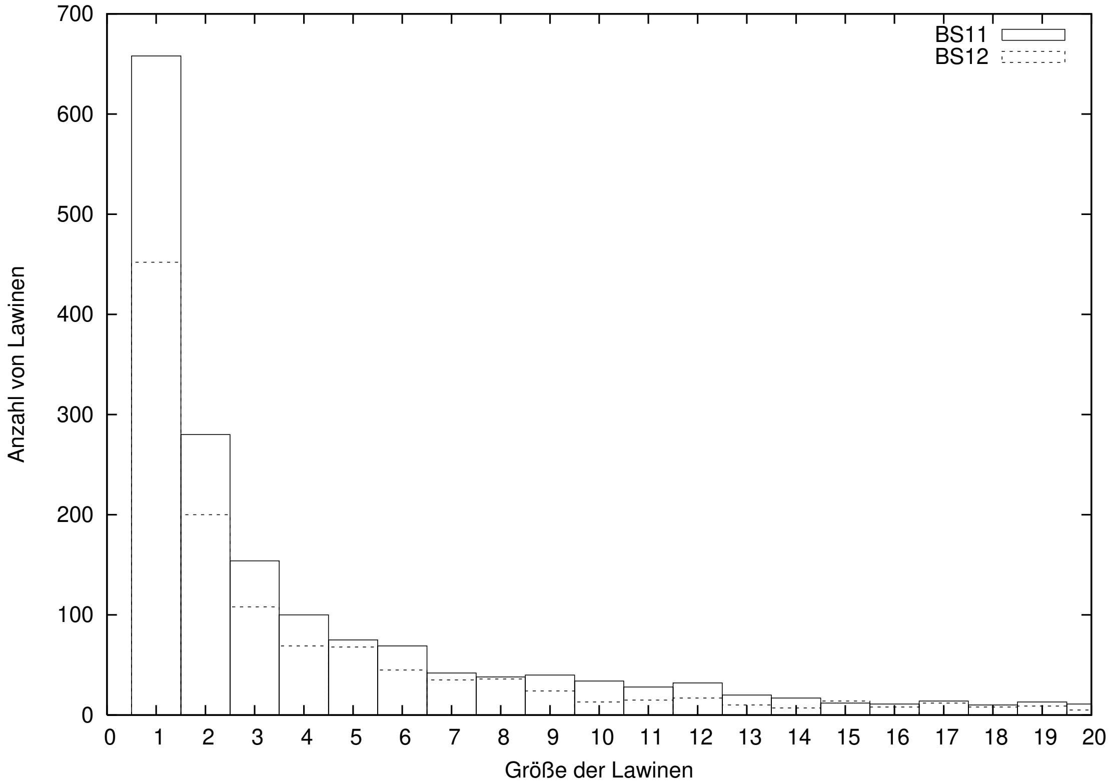


Abbildung 10: Häufigkeiten der Lawinengrößen für kleine L

des Evolutionsprozesses herangezogen werden können. Einen Anhaltspunkt dafür bietet der Vergleich der Abbildungen 3 und 10. Die Ähnlichkeit beider Graphen fällt sofort auf, wobei man allerdings beachten muss, dass die dargestellten Größen nicht identisch sind. Es sei dem geneigten Leser überlassen, die geeigneten Schlüsse zu ziehen.

Literatur

[1] Bak, Per: *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality.* Springer-Verlag, New York, 1996

[2] Demtröder, W.: *Experimentalphysik I: Mechanik und Wärme.* 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1998

[3] Paczuski, M.; Maslov, S.; Bak, P.: *Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models.* Phys. Rev. E, Volume 53, Number 1, p414, 1996

[4] Garcia, G.J.M.; Dickman, R.: *Asymmetric dynamics and critical behavior in the Bak-Sneppen model.* cond-mat/0408164, 2004

[5] Bak, P.; Sneppen, K.: *Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution.* Phys. Rev. Lett. 71, Issue 24, p4083, 1993

[6] Java-Applet zum Bak-Sneppen-Modell: *http://www.tu-bs.de/ honecker/mc/soc/*

[7] Kursdaten Dow Jones: *http://www.bwinvestment.de*